LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 2

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T2.1 Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit stetig differenzierbarer Verteilungsfunktion $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Zeigen Sie, dass μ eine Lebesgue-Dichte besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe T2.2 Zeigen Sie, ohne dabei die Jensen-Ungleichung zu benutzen: Gilt $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, so folgt für $0 < j < k$, dass $\mathbb{E}[|X|^j] < \infty$ und sogar

$$\mathbb{E}[|X|^j] \leq (\mathbb{E}[|X|^k])^{j/k}.$$

Aufgabe T2.3 Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und sei $F(x) = P((-\infty, x])$. Zeigen Sie, dass für $c > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+c) - F(x))\,\mathrm{d}x = c.$$

Aufgabe T2.4 Sei $p > 0$ und $X \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\text{(a) } y^p P(X > y) \xrightarrow{y \to \infty} 0, \qquad \text{(b) } \mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty y^{p-1} P(X > y)\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe T2.5 Für eine Zufallsvariable X gilt

$$\|X\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|X\|_p.$$

Hausaufgaben

Aufgabe H2.1 Sei $\|X\|_\infty := \inf\{M > 0 : P(\{\omega : |X(\omega)| > M\}) = 0\}$. Seien X, Y zwei Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_1 \|Y\|_\infty.$$

Aufgabe H2.2 Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $\mu \ll \nu$ und f die Dichte von μ bzgl. ν. Sei weiterhin eine messbare, μ-integrierbare Funktion g gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\int_A g \cdot f \,\mathrm{d}\nu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe H2.3 Wir führen die *Beta(α, β)-Verteilung* über die Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ ein. Hierbei gilt für den Normierungsfaktor

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \,\mathrm{d}u,$$

wobei Γ die Gamma-Funktion (also $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ für $z > 0$) bezeichne. Sei nun X Beta(α, β)-verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H2.4 Sei X eine Zufallsvariable. Es existiere $r > 0$, sodass $\|X\|_r = (\mathbb{E}[|X|^r])^{1/r} < \infty$. Zeigen Sie

$$\lim_{p \to 0} \|X\|_p = e^{\mathbb{E}[\log |X|]}.$$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, den Ausdruck $p^{-1}(\mathbb{E}[|X|^p] - 1)$ für $p \to 0$ zu betrachten.

Aufgabe H2.5 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge an unabhängigen, identisch verteilten (i.i.d.) und beschränkten Zufallsvariablen (d.h. es existiert $M \in \mathbb{R}$, sodass $P(|X_1| \leq M) = 1$). Sei weiterhin $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Wir definieren $S_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq \frac{4}{n^2} \mathbb{E}[X_1^4].$$