LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 1

Hausaufgaben

Aufgabe H1.1 Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, μ-messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert, für die $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu$ nicht konvergiert.

(b) Finden Sie eine Folge $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ μ-messbarer Funktionen, sodass der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existiert, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \neq \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe H1.2

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_n A_n = A$. Zeigen Sie, dass

$$\int_A \varphi \,\mathrm{d}P = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} \varphi \,\mathrm{d}P.$$

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $0 \leq f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Zeigen Sie, dass durch $\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\nu, A \in \mathcal{A}$, ein bzgl. ν absolut stetiges Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert ist.

Aufgabe H1.3 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$$

(a) ein Dynkin-System ist.

(b) $\cap$-stabil ist.

Aufgabe H1.4 Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\Omega \in \mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Weiter sei $\mathcal{H}$ ein reeller Vektorraum von beschränkten, reellwertigen Funktionen auf Ω mit folgenden Eigenschaften:

(i) $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$.

(ii) Für $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und $\mathcal{H} \ni f_n \to f$ punktweise mit f beschränkt gilt $f \in \mathcal{H}$.

Dann ist $\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \sigma(\mathcal{E})\text{-messbar und beschränkt}\} \subseteq \mathcal{H}$.