

Stochastik: Übungsblatt 15

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T15.1 Es soll beispielsweise die Sprödigkeit eines Kühlwasserrohres in einem Kernkraftwerk überprüft werden. Dazu werden n unabhängige Messungen mit (zufälligen) Ergebnissen x_1, \dots, x_n durchgeführt. Wir nehmen an, die Messwerte sind normalverteilt mit bekannter Varianz $v > 0$ (sie entspricht der Güte des Messinstruments) und unbekanntem Erwartungswert m , der die gesuchte Sprödigkeit angibt. Es soll getestet werden, ob m unterhalb eines zulässigen Grenzwerts m_0 liegt.

Modellieren Sie die Situation als statistisches Modell und geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für $H_0 : m \leq m_0$ gegen $H_1 : m > m_0$ an.

Aufgabe T15.2 Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bezüglich einer Statistik T . Für $\theta_0 \in \Theta$ sei φ ein gleichmäßig bester Niveau- α -Test der Hypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$. Zeigen Sie: $\mathbb{E}_\theta[\varphi]$ ist in θ monoton wachsend.

Aufgabe T15.3 Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bezüglich einer Statistik T . Für $\theta_0 \in \Theta$ sei φ ein gleichmäßig bester Niveau- α -Test der Hypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$. Zeigen Sie: Der Fehler erster Art $\varphi \mapsto \mathbb{E}_\theta[\varphi]$ ist auf der ganzen Nullhypothese minimal, d.h. für jeden weiteren Test ψ mit $\mathbb{E}_{\theta_0}[\psi] = \alpha$ gilt $\mathbb{E}_\theta[\varphi] \leq \mathbb{E}_\theta[\psi]$ für alle $\theta \leq \theta_0$.