LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 9

Definition 1. Eine Folge $X_1, X_2, \dots$ von Zufallsvariablen konvergiert *im zweiten Mittel* gegen X, falls

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \to 0$$

für $n \to \infty$. Wir schreiben $X_n \xrightarrow{L^2} X$.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T9.1 Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge diskreter Zufallsvariablen, definiert als $P(Z_n = n^\alpha) = \frac{1}{n}, P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Finden Sie alle reellen Zahlen α, für die $X_n \xrightarrow{L^2} 0$.

Aufgabe T9.2

(i) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_n \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(ii) Sei $X_n \sim \text{Bin}\,(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{P} p$.

Aufgabe T9.3 Ein fairer Würfel werde n-mal geworfen. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl geworfener Sechser zwischen $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$ und $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$ liegt, mindestens $\frac{31}{36}$ beträgt.

Aufgabe T9.4 Eine Urne enthält eine schwarze und eine weiße Kugel. Jemand zieht eine Kugel, legt sie zurück und legt zusätzlich noch so viele weiße Kugeln in die Urne, wie schon enthalten sind. Er wiederholt dies immer wieder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Zeitpunkt gibt, ab dem er überhaupt keine schwarze Kugel mehr zieht?

Hausaufgaben

Aufgabe H9.1 Zeigen Sie, dass Konvergenz im zweiten Mittel Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert, also: $X_n \xrightarrow{L^2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

Aufgabe H9.2 Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen, sodass $\mathbb{E}[Z_n] = \mu$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_n) = \sigma^2 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ dann

$$\tfrac{1}{n} S_n \xrightarrow{L^2} \mu$$

gilt. *Bemerkung: Zusammen mit H9.1 wurde so ein alternativer Beweis für das schwache GGZ gegeben.*

Aufgabe H9.3

(i) Zeigen Sie: Gilt $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$, dann gilt auch $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} aX + bY$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie: Gilt $X_n \xrightarrow{P} X$ und ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so gilt auch $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Aufgabe H9.4 Sei f stetig auf $[0,1]$. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für große n der durchschnittliche Funktionswert $I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit als Näherung für das Integral $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ verwendet werden kann (zeigen Sie $I_n \to I$ in Wahrscheinlichkeit oder fast sicher).

Aufgabe H9.5 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$ und $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin a_n eine monoton steigende Folge mit $0 < (n+1)a_n \le a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k)}{a_k^2} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{f.s.}} 0.$$