

Stochastik: Übungsblatt 3

Hinweis: Auf diesem Blatt darf die Linearität des Erwartungswerts (also $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$), die in der Vorlesung am 03.11. rigoros bewiesen wird, verwendet werden.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T3.1 Sei X eine Zufallsvariable, deren Varianz existiert. Seien weiterhin $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Aufgabe T3.2 Zeigen Sie:

- (a) Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] = 0$, dann ist $P(X = 0) = 1$.
- (b) Ist $\text{Var}(X) = 0$, so ist $P(X = \mu) = 1$.

Aufgabe T3.3 Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X \sim \text{Ber}(p)$ sowie $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ und $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Hausaufgaben

Aufgabe H3.1 Es sei X eine Zufallsvariable, die Werte in \mathbb{N}_0 annimmt und deren Erwartungswert existiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Berechnen Sie als Anwendung $\mathbb{E}[X]$ für $X \sim \text{Geom}(p)$ und $p \in (0, 1)$.

Aufgabe H3.2 Sei X eine diskrete Zufallsvariable, $a \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton steigende Funktion. Zeigen Sie

$$h(a)P(X \geq a) \leq \mathbb{E}[h(X)].$$

Folgern Sie für $a > 0$ die Markov- bzw. die Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P(|X| \geq a) \leq a^{-1} \mathbb{E}[|X|], \quad \text{bzw.} \quad P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq a^{-2} \text{Var}(X).$$