

Stochastik Übungsblatt 13

*Hinweis: Blatt 13 wird **nicht** korrigiert und braucht deswegen auch nicht abgegeben zu werden.*

Aufgabe 13.1

Im Sechserpack Kakao-Drinks sollte an jeder Packung ein Trinkhalm sein, der jedoch mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ fehlt, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ defekt ist und nur mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ gut ist. Sei A das Ereignis „Mindestens ein Trinkhalm fehlt und mindestens einer ist gut“. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, formulieren Sie das Ereignis A mengentheoretisch und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 13.2

Betrachten Sie das Galton-Brett: Eine Kugel passiere nacheinander n Reihen von Stiften, an denen sie je mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ rechts bzw. links vorbeiroule (vergleiche Abbildung 1). Sie falle dann in eine von $n + 1$ Schachteln mit Aufschrift $\{0, \dots, n\}$. Finden Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment.

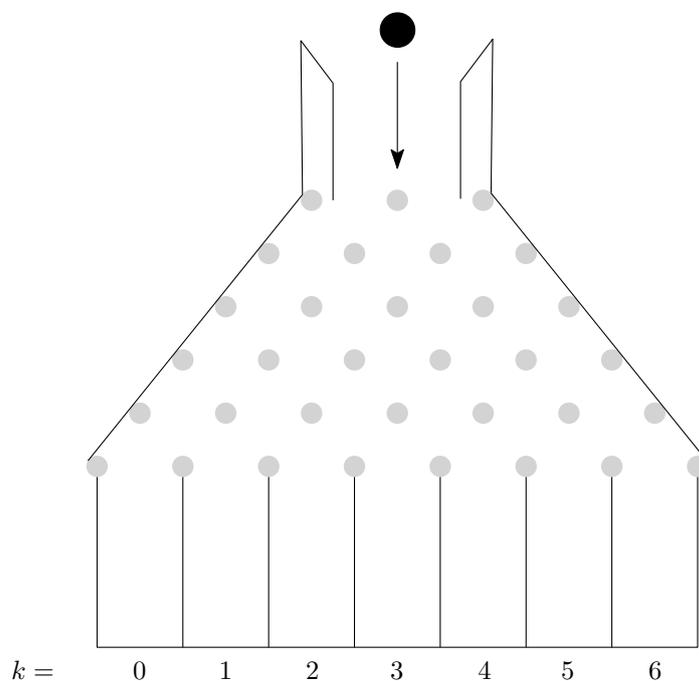


Abbildung 1: Galton-Brett für $n = 6$.

Aufgabe 13.3

Alice schlägt Bob folgendes Spiel vor. „Hier habe ich eine unfaire Münze die Kopf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ zeigt. Du brauchst nur €100 Startkapital; jedes Mal, wenn die Münze Kopf zeigt, verdopple ich dein Kapital, andernfalls musst du mir die Hälfte deines Kapitals zahlen. X_n bezeichne dein Kapital nach dem n -ten Münzwurf. Wie du leicht sehen kannst, gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \infty$.“ Soll sich Bob auf dieses Spiel einlassen? Überprüfen Sie dazu die Behauptung von Alice und zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$ fast sicher.

Aufgabe 13.4

Gegeben sei eine Urne mit insgesamt höchstens N Kugeln. Sei X_n die Anzahl der Kugeln in der Urne nach n -maliger Durchführung des folgenden Verfahrens: Falls die Urne nicht leer ist, wird eine Kugel zufällig entnommen und es wird durch (fairen) Münzwurf entschieden, ob sie zurückgelegt wird oder nicht; falls die Urne leer ist, wird durch (ebenfalls fairen) Münzwurf entschieden, ob sie leer bleibt oder mit N Kugeln neu gefüllt wird. Beschreiben Sie diese Situation als Markov-Kette und geben Sie die Übergangsmatrix an! Wie ist X_n für große n verteilt?

Aufgabe 13.5

Eine Blutprobe wird mikroskopisch untersucht, um den Anteil $\vartheta \in (0, 1)$ infizierter Zellen zu bestimmen. Dafür werden nacheinander n Zellen beobachtet und als gesund oder infiziert befunden. Die Beobachtungen dürfen als unabhängig und uniform ausgewählt angenommen werden. Leiten Sie ein statistisches Modell ab und geben Sie einen MLE-Schätzer für die Kenngröße ϑ an. Ist $\text{MLE}(\vartheta)$ erwartungstreu?