LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis eines Erdbebens mit einer Stärke von mindestens 8 auf der Richterskala an einem beliebigen Tag sei $p \in (0,1)$. Eine Versicherung ist an einer Schätzung des Parameters $\vartheta = 1/p$ interessiert und zählt dafür die Anzahl der Tage bis zum nächsten solchen Ereignis (gerechnet ab dem letzten solchen Ereignis).

(a) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\tau}_1$ für ϑ sowie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\mathrm{MLE}(\vartheta)$ an.

(b) Die Versicherung zählt nun die Anzahl der Tage bis zum k-ten Erdbeben. Geben Sie in dieser neuen Situation einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\tau}_2$ für ϑ und $\mathrm{MLE}(\vartheta)$ an.

Aufgabe 12.2
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein parametrisches stochastisches Standardmodell. Geben Sie $\mathrm{MLE}(\vartheta)$ an und berechnen Sie dessen Bias, falls

(i) $P_\vartheta = \mathcal{N}_{\vartheta,\sigma^2}$ mit $\sigma^2 > 0$, $\Theta = \mathbb{R}$,

(ii) $P_\vartheta = \mathcal{N}_{\mu,\vartheta}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\Theta = \mathbb{R}_{>0}$,

(iii) $P_\vartheta = \exp(1/\vartheta)$ mit $\Theta = \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 12.3
Die Gewerbeaufsicht will die Schankgenauigkeit auf dem Oktoberfest überprüfen. Bei einer Stichprobe von $n = 14$ ergibt sich ein durchschnittliches Inhaltsvolumen pro Maß von $\bar{x} = 0.93$ Litern. Nehmen Sie an, dass das Inhaltsvolumen pro Maß normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0.15$ ist.

(i) Berechnen Sie ein 0.95-Konfidenzintervall $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ für das erwartete Inhaltsvolumen pro Maß. *Hinweis: Für z_α, das α-Quantil der Standardnormalverteilung, gilt $z_{0.95} = 1.64$ und $z_{0.975} = 1.96$.*

(ii) Wie groß muss n gewählt werden, damit die Länge eines 0.95-Konfidenzintervalls für das erwartete Inhaltsvolumen pro Maß nicht länger als 0.02 Liter ist?

Aufgabe 12.4
Wir betrachten das Binomialmodell, also $\Omega = \{0, \dots, n\}$, $\Theta = (0, 1)$ und $P_\vartheta = \mathcal{B}_{n,\vartheta}$ (also die Bernoulli-Verteilung für n Alternativ-Versuche). Gesucht ist ein Konfidenzintevall für die Erfolgswahrscheinlichkeit ϑ. Der beste Schätzer für ϑ ist $\tau = \omega/n$, weshalb wir den Ansatz

$$C(\omega) = \left(\frac{\omega}{n} - \varepsilon, \frac{\omega}{n} + \varepsilon\right)$$

machen, wobei $\varepsilon > 0$ geeignet zu bestimmen ist, sodass

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} P_\vartheta(\omega \in \Omega : \vartheta \in C(\omega)) \geq 1 - \alpha \tag{1}$$

für ein $0 < \alpha < 1$. Wir wählen hierfür zwei Wege:

(i) Zeigen Sie, dass (1) erfüllt ist, falls $4n\alpha\varepsilon^2 \geq 1$.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass n groß genug ist, um approximativ den zentralen Grenzwertsatz zu verwenden, und leiten Sie eine Bedingung her, unter der (1) erfüllt ist.