LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Prof. Dr. Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 10: Lösungsskizzen

Aufgabe 10.1

(a) $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) : \omega_i \in [n], \omega_i \neq \omega_j\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{U}_\Omega$.
Also $\omega_i \leq k \Leftrightarrow i$-te gezogene Kugel weiß.

(b) Mit $f(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq k\}}(x)$ gilt $A_l = \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^m f(\omega_i) = l\}$.

(c) Mit $|\Omega| = n!/(n-m)!$ und $|A_l| = \binom{k}{l}\binom{n-k}{m-l}m!$ gilt

$$P(A_l) = \frac{\binom{k}{l}\binom{n-k}{m-l}}{\binom{n}{m}}.$$

(d) $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) : \omega_i \in [n]\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{U}_\Omega$. Ereignis A_l ist beschrieben wie oben. Aber $|\Omega| = n^m$ und $|A_l| = \binom{m}{l}k^l(n-k)^{m-l}$, und somit

$$P(A_l) = \binom{m}{l}\left(\frac{k}{n}\right)^l\left(\frac{n-k}{n}\right)^{m-l}.$$

Aufgabe 10.2
$\Omega = \{(Z_i)_{i=1}^m : Z_i \leq n \ \forall i, \sum_{i=1}^m Z_i = n\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{U}_\Omega$. Die Verteilung der Anzahl zerstörter Basenpaare über alle Abschnitte ist hypergeometrisch, für einen einzelnen Wert Z_i erhalten wir

$$P(Z_i = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{m(M-1)}{n-k}}{\binom{mM}{n}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq k \leq n\}}(k).$$

Für großes N gilt approximativ, dass $P(Z_i = k) \simeq \mathcal{B}_{n,\frac{1}{m}}(k)$, die Z_i also binomialverteilt sind. Durch die Motivation der Poisson-Verteilung wissen wir bereits, dass $\mathcal{B}_{n,\frac{1}{m}} \to \mathrm{Poi}_\lambda$ für $n \to \infty$ und $n/m \to \lambda$. Da sowohl n als auch N recht groß sind, lässt sich eine Approximation durch eine Poisson-Verteilung rechtfertigen.

Aufgabe 10.3
Für $X \sim \exp(\lambda)$ gilt $P(X \leq x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} P(X \geq x + t | X \geq x) &= \frac{P(X \geq x+t)}{P(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} \\ &= e^{-\lambda t} = P(X \geq t). \end{aligned}$$

Nehme nun an, X ist gedächtnislos. Setze $g(x) := P(X \geq x)$. Für $x, y > 0$ gilt dann

$$g(x+y) = P(X \geq x+y | X \geq y) P(X \geq y) = g(x)g(y).$$

Wiederholtes Anwenden liefert $g(1) = g(1/n)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X nur positive Werte annimmt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g(1/n) > 0$ und mit voriger Beobachtung folgt daraus auch $g(1) > 0$. Wähle nun $\lambda > 0$ so, dass $g(1) = e^{-\lambda}$. Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$, dass

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>0}$. Aufgrund der Stetigkeit der Verteilung von X folgt daraus $g(x) = e^{-\lambda x}$.

Aufgabe 10.4

Nach dem SGgZ gilt $S_n \to 0$ fast sicher und damit insbesondere auch $S_n \to 0 =: S_\infty$ in Verteilung, also $F(x) := F_{S_\infty}(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x)$. Damit gilt für alle $u \in (0,1)$ folglich $q_F(u) = 0$.

Aufgabe 10.8

Für $d = 2$ erhalten wir SRW auf $\mathbb{Z}$, welcher rekurrent ist. Sei also $d \geq 3$ und $X_0 = x$. Wir betrachten $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, den Abstand zu x zum Zeitpunkt n. Da T_d ein Baum ist, gibt es für jeden Knoten einen eindeutigen Pfad zu x und jeder Knoten y hat somit einen eindeutigen Abstand zu x (der RW auf T_d ist damit auch irreduzibel). Dann ist (X_n) eine irreduzible Markovkette auf $\mathbb{Z}_+$ mit Übergangsmatrix $\tilde{\pi}(0,1) = 1$ sowie $\tilde{\pi}(a, a+1) = (d-1)/d$ und $\tilde{\pi}(a, a-1) = 1/d$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Anschaulich lässt sich (X_n) durch Vereinfachung von T_d erreichen, indem alle Knoten mit gleichem x-Abstand zu einem einzigen Knoten kontrahiert werden (die Übergangsmatrix $\tilde{\pi}$ bleibt so erhalten).

Nun gilt $X_n \geq Y_n$, wenn $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ der Random Walk auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $(d-1)/d$ nach rechts und $1/d$ nach links und Start in Null ist (Coupling).

Es bleibt zu zeigen, dass Y_n einen Drift nach rechts besitzt. Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen und $\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n] = (d-2)/d =: \mu > 0$ gilt, dass $Y_n/n \to \mu$ f.s. für $n \to \infty$. Mit der Chernoff-Abschätzung gilt

$$P(Y_n < (1-\delta)\mathbb{E}[Y_n]) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{\mathbb{E}[Y_n]}.$$

Setzen wir $\delta = 1/2$, so erhalten wir

$$p_n := P(Y_n < \frac{n\mu}{2}) \leq \left(\sqrt{\frac{2}{e}} \right)^{n\mu} = \alpha^n$$

für $\alpha = (2/e)^{\mu/2} < 1$. Doch p_n ist sicherlich eine obere Schranke für eine Rückkehr zur Null zum Zeitpunkt n, weswegen für die Green-Funktion gilt, dass

$$G(0,0) \leq \sum_{n \geq 0} \alpha^n < \infty,$$

und somit der Random Walk auf T_d transient für $d \geq 3$ ist.