LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1
In einer Urne befinden sich n Kugeln, davon k weiße und $n-k$ schwarze. Es werden zufällig m Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen

(a) Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment durch einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer diskreten Gleichverteilung P.

(b) Gegeben $l \in \{0, \dots, m\}$, identifizieren Sie das Ereignis A_l: „Unter den m gezogenen Kugeln sind genau l weiße Kugeln".

(c) Berechnen Sie $P(A_l)$.

(d) Wiederholen Sie Aufgaben (a)-(c), wenn jetzt die Kugeln *mit* Zurücklegen gezogen werden.

Aufgabe 10.2
Das Genom der Taufliege Drosophila melanogaster gliedert sich in etwa $m = 7000$ Abschnitte, die anhand des Färbungsmusters der in den Speicheldrüsen befindlichen Riesenchromosomen erkennbar sind. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß sich in jedem Abschnitt gleich viele, nämlich $M = 23000$ Basenpaare befinden. Das Genom umfasst also $N = mM$ Basenpaare. Durch hochenergetische Bestrahlung werden $n = 1000$ (rein zufällig verteilte) Basenpaare zerstört.

Finden Sie ein stochastisches Modell für die Anzahl der zerstörten Basenpaare in allen Genomabschnitten. Berechnen Sie für jedes $1 \leq i \leq m$ die Verteilung der Anzahl Z_i der zerstörten Basenpaare im Abschnitt i und begründen Sie, daß Z_i approximativ Poisson-verteilt ist.

Aufgabe 10.3
Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass X genau dann exponentialverteilt ist (also $X \sim \exp(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$), wenn X gedächtnislos ist, also

$$P(X \geq x + t | X \geq x) = P(X \geq t)$$

für beliebige $x, t \geq 0$.

Aufgabe 10.4
Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit $X_i \sim \mathcal{N}_{0,1}$ und sei $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Existiert $\lim_{n \to \infty} q_{S_n}(0.99)$, also das 99%-Quantil der Grenzverteilung von S_n? Falls ja, was ist sein Wert?

Aufgabe 10.5

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph, d.h. sei V eine endliche Menge (die *Knoten* des Graphen) und $E \subseteq V \times V$ die *Kanten* des Graphen. Schreibe $x \sim y$, falls $(x, y) \in E$, die Knoten x und y also *benachbart* sind (Bemerkung: $\sim$ ist eine symmetrische Relation). Definiere als $\deg(x) := |\{y \in V : x \sim y\}|$ den Grad von Knoten $x \in V$.

Mit $\Pi \in [0,1]^{V \times V}$ und $\pi(x, y) = \frac{1}{\deg(x)} \cdot \mathbb{1}_{\{x \sim y\}}$ heißt die Markov-Kette auf dem Zustandsraum V mit Übergangsmatrix Π die Irrfahrt auf dem Graphen G. Unter welchen Voraussetzungen an G ist Π irreduzibel? Bestimmen Sie eine reversible Verteilung für Π. (Eine Verteilung $\alpha(\cdot)$ heißt *reversibel*, wenn $\alpha(x)\pi(x, y) = \alpha(y)\pi(y, x)$ für alle $x, y \in E$.)

(b) Betrachten Sie einen Springer auf einem (ansonsten leeren) Schachbrett, der jeden möglichen Zug mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählt. Er starte (i) in einer Ecke, (ii) in einem der 16 Mittelfelder. Wie viele Züge braucht er im Mittel, um wieder an seinen Ausgangspunkt zurückzukehren?

Aufgabe 10.6

Bei einem Geschicklichkeitsspiel befindet sich eine Kugel in einem „Labyrinth“ von N konzentrischen (von innen nach außen nummerierten) Ringen, die jeweils abwechselnd auf einer Seite eine Öffnung zum nächsten Ring besitzen. Die Aufgabe besteht darin, durch geeignetes Kippen des Spielbretts die Kugel in die Mitte (den „Ring Nr. 0“) zu bringen. Nehmen Sie an, dass sich die Kugel am Anfang im m-ten Ring befindet ($0 < m < N$), und dass es dem Spieler jeweils mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ gelingt, die Kugel vom k-ten in den $(k-1)$-ten Ring zu befördern, während sie mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ in den $(k+1)$-ten Ring zurückrollt. Der Spieler hört auf, wenn sich die Kugel im 0-ten Ring (Ziel) oder im N-ten Ring (Entmutigung) befindet. Beschreiben Sie diese Situation als Markov-Kette und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Ziel erreicht!

Aufgabe 10.7

Gegeben sei folgender stochastischer Prozess, der als *Galton-Watson-Prozess* bekannt ist: Eine Population von Lebewesen vermehre sich zu diskreten Zeitpunkten unabhängig voneinander und ungeschlechtlich. Jedes Individuum der n-ten Generation wird unabhängig von allen anderen in der folgenden Generation mit Wahrscheinlichkeit $\rho(k)$ durch k Nachkommen ersetzt (mit ρ einer Zähldichte mit Werten in $\mathbb{Z}_+$).

Sei X_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation. Dann ist $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}_+$ mit Übergangsmatrix

$$\pi(n, m) = \sum_{k_1 + \ldots + k_n = m} \rho(k_1) \cdot \ldots \cdot \rho(k_n),$$

wobei die Summe über alle sich zu m aufaddierenden Vektoren in $\mathbb{Z}_+^n$ rangiert. Dabei sei $\pi(0, k) = \delta_{0,k} = \mathbb{1}_{\{k=0\}}(k)$, d.h. sobald die Population ausstirbt, ist der Prozess trivial. Sei nun $0 < \rho(0) < 1$. Wir sind nun interessiert an $q := h_0(1)$, der Aussterbewahrscheinlichkeit für ein einzelnes anfängliches Individuum.

(i) Zeigen Sie, dass für die Aussterbewahrscheinlichkeiten mit anfänglich k bzw. einem Individuum die Relation

$$P^k(X_n = 0) = P^1(X_n = 0)^k$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass q der kleinste Fixpunkt der Funktion $\varphi_\rho(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \rho(k)s^k$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie für etwaige andere Fixpunkte s die Funktionen $h(k) = s^k$.

Aufgabe 10.8 (Bonusaufgabe)
Sei T_d der d-reguläre unendliche Baum ($d \geq 2$), d.h. T_d ist ein unendlicher, zusammenhängender, kreisfreier Graph mit $\deg(x) = d$ für jeden Knoten (siehe Abbildung 1). Gegeben sei die Irrfahrt auf T_d mit Übergangsmatrix Π_d, definiert (analog zu Aufgabe 10.5) als $\pi_d(x, y) = 1/d$ falls $x \sim y$ und $\pi_d(x, y) = 0$ sonst. Untersuchen Sie Π_d auf Rekurrenz bzw. Transienz.

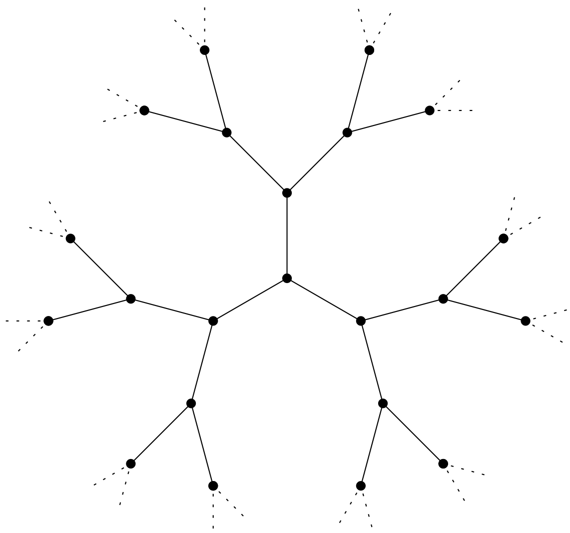

Abbildung 1: Teilgraph des 3-regulären Baums.