LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

(a) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable zu Parametern μ, σ^2 – für die Dichte f von X gelte also

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Bestätigen Sie, dass in der Tat $\mathbb{E}[X] = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. (unabhängig, identisch verteilt) mit $X_1 \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$. Zeigen Sie, dass $Y := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ wieder normalverteilt ist. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von Y.

Aufgabe 8.2
Geben Sie eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2$ an, für welche weder das (schwache oder starke) Gesetz der großen Zahlen noch der zentrale Grenzwertsatz gilt.

Aufgabe 8.3
Ein schweres Teilchen bewege sich in vorgegebener Richtung durch den Raum und erfahre von leichteren Teilchen durch zufällige Stöße pro Zeiteinheit eine zufällige Geschwindigkeitsumkehr, d.h. für seine Ortskoordinate (mit vorgegebener Richtung) zur Zeit t gelte $X_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} V_i$ mit unabhängigen Geschwindigkeiten V_i, wobei $P(V_i = \pm 1) = 1/2$. Geht man zu makroskopischen Skalen über, so wird das Teilchen zur Zeit t beschrieben durch die Zufallsvariable $B_t^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} X_{t/\varepsilon}$, wobei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie den Verteilungslimes B_t von $B_t^{(\varepsilon)}$ für $\varepsilon \to 0$ sowie dessen Verteilungsdichte ϱ_t. Verifizieren Sie, dass diese Dichten mit einer geeigneten Diffusionskonstanten $D > 0$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \varrho_t(x)}{\partial t} = -\frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varrho_t(x)}{\partial x^2}$$

erfüllen.

Aufgabe 8.4
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen W-Raum mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $X_n \xrightarrow{d} X$.

(b) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P(X_n = k) - P(X = k)| \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.5

(a) Zum Zeitpunkt Null enthalte eine Urne r rote und w weiße Kugeln, wobei $r, w \in \mathbb{N}$. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen und zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Dies ist das sogenannte *Pólyasche Urnenmodell.* Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $X_n := (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$, wobei $X_n^{(1)}$ bzw. $X_n^{(2)}$ die Anzahl der roten bzw. weißen Kugeln in der Urne nach n Zügen angibt. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ eine Markovkette ist. Geben Sie Zustandsraum und Übergangsmatrix an.

(b) Sei nun $Y_n := X_n^{(1)}$ die Anzahl roter Kugeln in der Urne nach n Zügen. Ist $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ eine (stationäre) Markovkette?