LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \to 0$ stochastisch.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, welches aufzeigt, dass aus stochastischer Konvergenz im Allgemeinen nicht fast sichere Konvergenz folgt.

Aufgabe 7.2

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 1$ und $\mathrm{Var}(X) = 0$. Zeigen Sie, dass $P(X = 1) = 1$.

Aufgabe 7.3

Sei X eine Zufallsvariable und seien $a, t > 0$.

(a) Zeigen Sie

$$P(X \geq a) \leq e^{-at}\mathbb{E}[e^{tX}].$$

(b) Sei $Y \sim \mathcal{N}_{0,1}$. Folgern Sie

$$P(Y \geq a) \leq e^{-a^2/2}.$$

(c) Vergleichen Sie diese Abschätzung mit jener, die sich aus der Chebyshev-Ungleichung ergibt. Welche ist für große a besser?

Aufgabe 7.4

Sei f stetig auf $[0, 1]$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass für große n der durchschnittliche Funktionswert $I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher als Näherung für das Integral $I = \int_0^1 f(x)dx$ verwendet werden kann.

Aufgabe 7.5

(a) Zeigen Sie, dass aus $\mathcal{L}^1$-Konvergenz stochastische Konvergenz folgt. In anderen Worten: Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ Zufallsvariablen mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$.

(b) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ Zufallsvariablen. Zeigen sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1.$$

(Hierbei bezeichnet „$\wedge$“ das Minimum.)