LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1
Am Abend eines Wahltags werden die Stimmen für zwei konkurrierende Kandidaten A und B ausgezählt. Beide Kandidaten seien gleich beliebt, d. h. auf jedem Stimmzettel sei A oder B mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit 1/2 angekreuzt. Insgesamt gebe es 2N Stimmen. Sei $X_i = \pm 1$ je nachdem, ob die i-te Stimme für A oder für B ist. Die Summe $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ gibt also an, wie weit A nach Auszählung von j Stimmen vor B führt (bzw. hinter B zurückliegt). (Die Folge $(S_j)_{j\geq 1}$ heißt einfache symmetrische Irrfahrt.) Sei $1 \leq n \leq N$ und sei $u_n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

(a) Sei G_n das Ereignis, dass nach $2n$ ausgezählten Stimmen erstmals Gleichstand herrscht. Zeigen Sie, das $P(G_n) = 2^{-2n+1}[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}] = u_{n-1} - u_n$.
Hinweis: Veranschaulichen Sie sich dazu die Folge $(S_j)_{j\leq 2n}$ *durch die Pfade durch die Punkte* (j, S_j) *und vergleichen Sie die Anzahl der Pfade von* $(1,1)$ *nach* $(2n-1,1)$*, welche die horizontale Achse treffen, mit jenen von* $(1,1)$ *nach* $(2n-1,-1)$.

(b) Sei $G_{>n}$ das Ereignis, dass während der Auszählung der ersten $2n$ Stimmen niemals Gleichstand herrscht. Berechnen Sie $P(G_{>n})$.

Aufgabe 4.2
Eine Urne enthalte rote und blaue Kugeln, insgesamt zehn Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen (ohne Zurücklegen) zweier Kugeln genau zwei rote zu erhalten, sei genau 1/3. Wie viele rote Kugeln befinden sich in der Urne?

Aufgabe 4.3
Es werden zwei Kugeln aus zwei verschiedenen Urnen gezogen, jeweils eine aus jeder Urne. In der ersten Urne befinden sich vier Kugeln mit der Aufschrift 1 bis 4 und in der zweiten Urne befinden sich zwei Kugeln mit der Aufschrift 1 und 2. Sei X die Aufschrift der Kugel aus der ersten Urne und Y das Maximum der Aufschriften beider Kugeln.

(a) Definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y auf einem geeigneten W-Raum und bestimmen Sie ihre Verteilungen. Geben Sie ferner die Verteilungsfunktion von X an.

(b) Bestimmen Sie $P(X \leq 2, Y \geq 2)$.

Aufgabe 4.4
Seien T_1 und T_2 zwei geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter p_1 bzw. p_2, d.h. $P(T_i = k) = p_i(1-p_i)^k$ für $k \in \mathbb{Z}_+$ und $i \in \{1,2\}$. Bestimmen Sie die Zähldichte von $T = T_1 + T_2$.

Aufgabe 4.5
Zeigen Sie, dass die Dichten folgender Verteilungen auf den entsprechenden Ereignisräumen (siehe Vorlesung) ein Wahrscheinlichkeitsmaß induzieren.

(i) Die Poisson-Verteilung: $\mathrm{Poi}_\lambda(\{k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ für $\lambda > 0, k \in \mathbb{Z}_+$.

(ii) Die negative Binomialverteilung: $\bar{\mathscr{B}}_{r,p}(\{k\}) = \binom{-r}{k} p^r (p-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}_+$.

(iii) Die Gammaverteilung: $\gamma_{\alpha,r}(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$, für $x > 0$,
wobei $\Gamma(r) = \int\limits_0^\infty y^{r-1} e^{-y} \mathrm{d}y$ für $r, \alpha > 0$.

(iv) Die Betaverteilung: $\beta_{a,b}(s) = \frac{s^{a-1}(1-s)^{b-1}}{B(a,b)}$, $0 < s < 1$,
wobei $B(a,b) = \int\limits_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} \mathrm{d}s$ und $a, b > 0$.

(v) Die Normalverteilung: $\phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.6
Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Seien X der kleinere Wert, Y der größere Wert und Z der Absolutbetrag des Unterschieds der beiden Werte. Bestimmen Sie die Verteilung von Z und die gemeinsame Verteilung von (X, Y).

Aufgabe 4.7
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit stetiger Dichtefunktion $f(x)$.

(a) Für $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ sei $Y = aX + b$. Zeigen Sie, dass $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f(\frac{y-b}{a})$ die stetige Dichtefunktion von Y ist.

(b) Sei $Y = |X|$. Ermitteln Sie die Dichtefunktion f_Y von Y und zeigen Sie, dass sie stetig ist.