

Stochastik Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Verteilungsfunktion F . Zeigen Sie:

- (i) F ist monoton wachsend,
- (ii) F ist rechtsseitig stetig und
- (iii) $\lim_{c \rightarrow -\infty} F(c) = 0$, $\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = 1$.

Aufgabe 3.2

Die Funktionen $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stückweise definiert durch

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad F_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \end{cases}.$$

Entscheiden Sie für jede Funktion F_i , ob sie Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_i auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Zähldichte oder Dichtefunktion von P_i und berechnen Sie $P_i(\{1, 2\})$, $P_i([1, 2.5])$ und $P_i([0.5, 2])$.

Aufgabe 3.3

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem W-Raum und F_X die Verteilungsfunktion von X . Wie viele Unstetigkeitsstellen besitzt F_X maximal?

Aufgabe 3.4

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Verteilungsfunktion F . Sei weiterhin q_F die Quantil-Transformation von F , also $q_F(u) = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid F(c) \geq u\}$ für $u \in (0, 1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) q_F ist eine monoton steigende, linksseitig stetige Funktion.
- (ii) F ist stetig $\iff q_F$ ist streng monoton steigend.
- (iii) F ist streng monoton steigend $\iff q_F$ ist stetig.
- (iv) Für alle $u \in (0, 1)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $q_F(u) \leq c \iff F(c) \geq u$.

- (v) $F(q_F(u)) \geq u$.
- (vi) $q_F(F(c)) \leq c$.
- (vii) F ist streng monoton steigend $\iff q_F(F(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (viii) F ist stetig $\iff F(q_F(u)) = u$ für alle $u \in (0, 1)$.

Aufgabe 3.5

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Sei T das Produkt der Augenzahlen. Definieren Sie T als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie $P(T = 6)$.