

## Stochastik Übungsblatt 2

### Aufgabe 2.1

Zeigen Sie, dass ein System  $\mathcal{F}$  von Teilmengen einer Menge  $\Omega$  genau dann eine  $\sigma$ -Algebra ist, wenn

$$\mathcal{F} \neq \emptyset, \quad A_n \in \mathcal{F} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \implies \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F}$$

gilt.

### Aufgabe 2.2

Sei  $\Sigma$  eine Menge von  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega \neq \emptyset$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F}^\cap := \bigcap_{\mathcal{F} \in \Sigma} \mathcal{F}$  wieder eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  ist.

### Aufgabe 2.3

Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein Ereignisraum und sei

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

eine Funktion, die in die nichtleere Menge  $\Omega'$  abbildet. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega' \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega'$  ist.

### Aufgabe 2.4

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und sei

$$A_\alpha = \{\omega \in \Omega \mid P(\{\omega\}) = \alpha\} \quad (\alpha \in (0, 1]).$$

Zeigen Sie:

$$|A_\alpha| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \in (0, 1]).$$

### Aufgabe 2.5

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit

$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  eine  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion ist.

**Aufgabe 2.6**

Ein Würfel mit den Augenzahlen 1,2,3,4,5,6 wird so manipuliert, dass die geraden Werte untereinander gleichwahrscheinlich sind, die ungeraden Werte untereinander gleichwahrscheinlich sind und 2 doppelt so wahrscheinlich wie 1 ist. Stellen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Würfeln die Augenzahl höchstens 3 ist.

**Aufgabe 2.7**

Sie bekommen aus einem Kartendeck Poker-Karten ( $4 \times 13$  Karten) fünf Karten auf die Hand. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, einen Vierling bzw. einen Drilling zu erhalten? Hierbei soll ein Drilling weder ein Vierling noch ein Full-House (Drilling plus Paar) sein.