

Die Bedeutung Münchner Mathematik für die multidimensionale Systemtheorie

Zum 90. Geburtstag von Prof. emeritus Dr. Friedrich Kasch

Ulrich Oberst
Institut für Mathematik, Universität Innsbruck
Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck, Austria
email: Ulrich.Oberst@uibk.ac.at, tel: +43 512 5076073

9. Februar 2011

Die Ergebnisse dieses Vortrages zu Ehren meines Doktorvaters **Herrn Prof. Dr. Friedrich Kasch zu seinem 90. Geburtstag** stammen aus meiner Zusammenarbeit mit Herrn Henri Bourlès, ENS Cachan, Paris [1].

Man betrachte folgendes lineare System von Verzögerungsdifferenzialgleichungen:

$$\begin{array}{cccccccl} y_1''(x) & + & 2y_1(x+3\pi) & + & 4y_2'(x-5) & + & 6y_3''(x-7\pi) & = & u_1(x) \\ y_1'(x+7\pi) & + & 6y_2'(x+5\pi) & + & 4y_2(x-3) & + & 2y_3'(x-1) & = & u_2(x) \end{array} \quad (1)$$

Dabei sind die $y_i(x)$ und $u_j(x)$ geeignete differenzierbare Funktionen, welche in der Ingenieurmathematik *Signale* genannt werden, wobei die u_j als *Eingaben* und die y_i als *Ausgaben* eines Systems interpretiert werden. Ein wichtiges Problem der Analysis und Systemtheorie ist es, bei gegebenen u_j solche Systeme zu lösen. Allgemeiner betrachten wir lineare Systeme *partieller* Differenzial-Differenzengleichungen, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine mehrdimensionale reelle oder komplexe unabhängige Variable ist. In algebraischer Sprache wählt man sich einen kommutativen *Operatorenring* A , der jedenfalls die partiellen Ableitungen $w \mapsto \partial w / \partial x_i$ und Verschiebungen $w(x) \mapsto w(x-y)$ enthält, und einen dazu passenden A -Modul W von Funktionen (Signalen) mit der skalaren Multiplikation $a \circ w$ und betrachtet die Lösbarkeit und Lösung von linearen Systemen

$$P \circ y = u, \quad P \in A^{p \times q}, \quad u \in W^p(\text{Spalten}), \quad y \in W^q. \quad (2)$$

Die folgenden Gleichungen (3) sind offensichtliche notwendige *Verträglichkeits- oder Integrabilitätsbedingungen* an die rechte Seite $u \in W^p$ für die Lösbarkeit von (2):

$$x \circ u = 0 \text{ für alle } x \in A^{1 \times p} \text{ mit } xP = 0. \quad (3)$$

Ein fundamentales Problem ist, ob diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend für die Lösbarkeit von (2) bei gegebenem u sind und (2) gegebenenfalls zu lösen. Weiter interessiert, in wieweit der Lösungsmodul des homogenen Systems $P \circ y = 0$ den Zeilenmodul $A^{1 \times p}P \subseteq A^{1 \times q}$ eindeutig bestimmt.

Diese Probleme der Analysis und Systemtheorie sind lösbar, falls der A -Modul ${}_AW$ ein **injektiver Cogenerator** ist oder, ausreichend, etwas abgeschwächte Eigenschaften dieses Begriffes hat. Bekanntlich spielt dieser Begriff in der Forschung und Lehre des Jubilars und seiner zahlreichen Schüler eine bedeutende Rolle [5, S.3, §5.8, §12.5, Kap. 13].

Mit der Mathematik von K. Stein und O. Forster (**Steinalgebren-** und **Moduln** [2]) und anderen, z.B. von H. Grauert und R. Remmert [4],[3], kann man zeigen, dass für verschiedene Operatorenbereiche A holomorpher Funktionen, welche alle die nötigen Differenzial- und Verschiebungsoperatoren enthalten und mit einer kanonischen lokal konvexen Topologie ausgestattet sind, der topologische Dualraum A' der sogenannten analytischen Funktionale mit der natürlichen A -Struktur (fast) ein injektiver A -Cogenerator ist und obige Probleme daher gelöst werden können. Weiter bildet die Laplace-Transformation diese A' A -isomorph auf A -Moduln W ganzer Funktionen ab, die für die Analysis und Systemtheorie von Interesse sind und natürlich ebenfalls die Lösung obiger Probleme gestatten.

References

- [1] H. Bourlès, U. Oberst, *Elimination, fundamental principle and duality for analytic linear systems of partial differential-difference equations with constant coefficients*, pp.1-42, 2011, eingereicht
- [2] O. Forster, *Zur Theorie der Steinschen Moduln und Algebren*, Math.Z. 97(1967), 376-405
- [3] H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Springer, Heidelberg, 1971
- [4] H. Grauert, R. Remmert, *Theorie der Steinschen Räume*, Springer, Heidelberg, 1977
- [5] F. Kasch, *Moduln und Ringe*, Teubner, Stuttgart, 1977