Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
3. Zentralübungsblatt

Man kreuze richtig an:

1) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Dann sind ebenfalls invertierbar:

   a) A^2 b) $A \cdot B^{-1}$ c) $A + B$ d) λA für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ e) A^T

2) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = E_n$. Dann ist …

   a) A invertierbar b) $A = A^{-1}$ c) $A^\mathsf{T} = (A^\mathsf{T})^{-1}$ d) $A = E_n$ oder $A = -E_n$

3) Es seien $A, B, P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Q \cdot A \cdot P = B$. Die Matrizen Q und P seien invertierbar. Dann gilt:

   a) $A = Q \cdot B \cdot P$ b) $A = P^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$
   c) $A = Q^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$ d) A invertierbar $\Longleftrightarrow$ B invertierbar

4) Die folgende Kette von elementaren Zeilenumformungen

$$\ldots \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \ldots \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots \overset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots$$

   bewirkt dasselbe wie …

   a) wenn man gar nichts macht. b) $\ldots \overset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \ldots \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots$
   c) $\ldots \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots$ d) $\ldots \overset{\mathrm{I}+2\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \ldots$

5) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann wird beim Bilden von $F \cdot A$ …

   a) die zweite Zeile von A mit 5 multipliziert.
   b) das 5-Fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile von A addiert.
   c) das 5-Fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile von A addiert.
   d) das 5-Fache der zweiten Spalte zur dritten Spalte von A addiert.
   e) das 5-Fache der dritten Spalte zur zweiten Spalte von A addiert.

Aufgaben:

1) Bringe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen auf Äquivalenznormalform.

Zur Erinnerung: Eine Äquivalenznormalform ist eine Matrix, die links oben eine „Einheitsmatrix“ beliebiger Größe enthält und ansonsten nur Nullen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Die Größe dieser Einheitsmatrix (also die Anzahl der Einsen) ist genau die Zahl, die wir später als den Rang *der Ausgangsmatrix bezeichnen werden.*