Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
2. Zentralübungsblatt

Klausurtermin: Anders als zwischenzeitlich verlautbart, muß der Klausurtermin doch bleiben wie zu Beginn angegeben: Samstag, 14. Februar 2015, 13-15 Uhr.

Man kreuze richtig an:

1) Bei dem Objekt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ handelt es sich um ein Element von …

   a) $\mathbb{R}^{2\times 3}$ b) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ c) $\mathbb{R}^{3\times 2}$ d) $\mathbb{R}^{3\times 3}$

2) Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ und $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Dann ist $A \cdot B \in \dots$

   a) $\mathbb{R}^{4\times 4}$ b) $\mathbb{R}^{4\times 7}$ c) $\mathbb{R}^{2\times 7}$ d) $\mathbb{R}^{7\times 2}$

3) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Welche der folgenden Objekte sind Elemente von $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

   a) $A^\top$ b) $A \cdot A^\top$ c) $A^\top \cdot A$ d) $A \cdot A^\top \cdot A \cdot A^\top$

4) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.
   Dann ist $A \cdot B^\top = \dots$

   a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \end{pmatrix}$

5) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \neq n$. Dann kann gebildet werden:

   a) $A + B + 3C$ b) $A \cdot B^\top \cdot C$ c) A^2 d) $C^\top \cdot A \cdot B^\top$

6) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist $A \cdot B = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $B = \dots$

   a) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ d) Es gibt kein solches $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

7) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist $A \cdot B = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $B = \dots$

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) Es gibt kein solches $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Aufgaben: Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1) Für die Matrix $C := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ berechne man $A \cdot C$ und $C \cdot A$.

2) Man beweise: Ist $\det A := ad - bc \neq 0$, so ist A invertierbar.

3) Man beweise: Ist A invertierbar mit $B = A^{-1}$, so ist $C = (\det A) \cdot B$.
   (Hinweis: Man verwende 1).)
   Man folgere, daß dann $\det A \neq 0$ ist.

Insgesamt haben wir damit Satz 2.18 der Vorlesung bewiesen:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist, und dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$