Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
12. Zentralübungsblatt

Man kreuze richtig an: (Wenn nichts anderes angegeben ist, bezeichnet V einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.)

1) Es sei v_1, v_2, v_3 eine Basis von V (also insbesondere $\dim V = 3$) und $p : V \to \mathbb{R}^3$ die Koordinatenabbildung bezüglich dieser Basis. Dann gilt $p(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für …

   a) $v = v_1 + v_2 + v_3$ b) $v = v_1 - v_2 - v_3$ c) $v = v_1 - v_2 + v_3$ d) $v = v_1 - v_2$

2) Welcher der folgenden Untervektorräume $W \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Komplement von $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$?

   a) $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $W = \mathbb{R}^3$

3) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang …

   a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

4) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Welche der folgenden Aussagen sind hinreichend dafür, daß $\operatorname{Rang}(A) = 2$ ist?

   a) Alle Einträge von A sind $\neq 0$.
   b) Alle Einträge von A sind (paarweise) verschieden.
   c) A ist invertierbar.
   d) $A = A^{\mathsf{T}}$.
   e) $\det A = 2$.

5) Es seien $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^4$ und $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$. Angenommen, A kann durch elementare Zeilenumformungen auf die Zeilenstufenform

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Dann gilt ...

a) $\mathrm{Rang}(A) = 3$.
b) Für jedes $b \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar.
c) $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_2, v_5 \rangle$.
d) v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.
e) v_1, v_2, v_5 sind linear unabhängig.
f) v_1, v_2, v_3, v_5 ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

6) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $0 \neq b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Angenommen, das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat (mindestens) zwei verschiedene Lösungen. Dann gilt ...

a) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat unendlich viele Lösungen.
b) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ hat unendlich viele Lösungen.
c) $\mathrm{Rang}(A) < n$.
d) Die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.