

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

- a) Es ist genau dann B eine Linearkombination von A_1, A_2, A_3 , wenn es Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = B$, was wiederum äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{aligned} &(1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = -1) \\ &\wedge (0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 = 1) \\ &\wedge (3 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 = 4) \\ &\wedge ((-1) \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + (-1) \cdot \lambda_3 = -6) \end{aligned} \\ \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, das man mit den üblichen Verfahren lösen kann. Es ergibt sich, daß das Gleichungssystem lösbar ist, d.h. B *läßt sich* als Linearkombination von A_1, A_2, A_3 schreiben. Die (im übrigen eindeutig bestimmte!) Lösung ist gegeben durch den

Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, so daß wir die (einzig mögliche) Darstellung

$$B = 1 \cdot A_1 - 2 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3$$

gefunden haben.

Für die Matrix C wiederholt man die gleiche Rechnung; sie führt diesmal auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses stellt sich jedoch als unlösbar heraus, also läßt sich C *nicht* als Linearkombination von A_1, A_2, A_3 darstellen.

Ein schneller Weg zum Auffinden dieser linearen Gleichungssysteme besteht darin, sich zu erinnern, daß man sich $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vorstellen kann als „seltsam notiertes“ Exemplar von \mathbb{R}^4 : Wenn man beide Mengen so miteinander identi-

fiziert, daß die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dem Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ entspricht, kann man die Aufgabenstellung als Frage nach der

Erzeugbarkeit eines Vektors in \mathbb{R}^4 durch drei gegebene Vektoren auffassen; daß diese Frage auf Gleichungssysteme vom erhaltenen Typ führt, ist aus der Vorlesung bekannt.

Die angegebene Identifikation von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit \mathbb{R}^4 läßt sich auch formal in den Rahmen der Vorlesung einbinden: Denn die sie vermittelnde Abbildung

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

ist nichts anderes als die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu einem Lösungsverfahren für Aufgaben des Typs von Ü-1 a), das in jedem endlichdimensionalen Vektorraum V funktioniert: Man übersetze mittels einer geeigneten Koordinatenabbildung die gegebene Frage über V in eine Frage über den uns gut bekannten Vektorraum \mathbb{R}^n .

- b) Das Polynom g läßt sich genau dann als Linearkombination von f_1, f_2, f_3 schreiben, wenn es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = g \\ \iff & \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x^3+x^2) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \\ \iff & \lambda_3 x^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 = 2x^3 + 3x^2 - 1 \\ \iff & (\lambda_3 = 2) \\ & \wedge (\lambda_2 + \lambda_3 = 3) \\ & \wedge (\lambda_1 + \lambda_2 = 0) \\ & \wedge (\lambda_1 = -1) \\ \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem stellt sich als lösbar heraus, also läßt sich g als Linearkombination von f_1, f_2, f_3 darstellen. Die (eindeutig bestimmte) Lösung ist gegeben durch $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also gilt

$$g = -f_1 + f_2 + 2f_3.$$

Für das Polynom h führt die gleiche Rechnung auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dieses erweist sich als unlösbar, also läßt sich h nicht als Linearkombination von f_1, f_2, f_3 darstellen.

Aufgabe Ü-2. Wir gehen vor wie in Aufgabe T-3 vom 8. Tutoriumsblatt: Es ist zu untersuchen, für welche b_1, \dots, b_4 das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & 3 & b_2 \\ 3 & 0 & 1 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array} \right)$$

lösbar ist. Die Lösbarkeit läßt sich präzise feststellen, sobald die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform gebracht ist:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & 3 & b_2 \\ 3 & 0 & 1 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array} \right) & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -6 & -8 & b_3 - 3b_1 \\ 0 & -7 & -11 & b_4 - 4b_1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 10 & 9b_1 - 6b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 10 & 10b_1 - 7b_2 + b_4 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 10 & 9b_1 - 6b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 - b_3 + b_4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$ ist, also ist die gesuchte Menge von Vektoren

$$U = \left\{ v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \mid b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0 \right\}$$

(„implizite Darstellung des explizit gegebenen, durch v_1, v_2, v_3 aufgespannten Unterraums von $\mathbb{R}^{4\alpha}$).

Der Vektor u läßt sich nicht als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellen, weil $u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0 - 1 - 2 + 4 = 1 \neq 0$ ist. Der Vektor w dagegen *läßt* sich auf solche Art darstellen, denn es ist $w_1 - w_2 - w_3 + w_4 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$. Die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ mit

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

ergeben sich nun durch *Lösen* des oben untersuchten linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & w_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 10 & 9w_1 - 6w_2 + w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dessen (eindeutig bestimmte) Lösung ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix},$$

also ist

$$w = \frac{1}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2 + \frac{2}{5}v_3.$$

(Wie immer, kann man die Korrektheit dieser Beziehung sofort überprüfen – aber man muß sie eben erst einmal finden...!)

Aufgabe Ü-3. Die Strategie besteht hier darin, zuerst einen Vektor $0 \neq v \in U \cap W$ zu suchen; von diesem wird sich dann herausstellen, daß nicht nur $\mathbb{R}v \subset U \cap W$, sondern sogar $\mathbb{R}v = U \cap W$ gilt. (Warum und unter welchen Umständen dies so ist, wird man später mit der Dimensionstheorie für Vektorräume bzw. Untervektorräume begründen können.)

Ein ähnliches Problem wurde bereits in Aufgabe T-1 c) vom 8. Tutoriumsblatt untersucht. Dort waren die beteiligten Untervektorräume jedoch in *impliziter* Form (also als Lösungsmengen eines gewissen Gleichungssystems) gegeben, was die Berechnung ihres Schnittes vereinfachte (man mußte nur die beiden Gleichungssysteme kombinieren). Es wäre nun möglich, zu den explizit angegebenen Untervektorräume U und W jeweils eine implizite Darstellung zu bestimmen und anschließend so vorzugehen wie in der Lösung zur Aufgabe aus dem Tutoriumsblatt. Stattdessen wählen wir einen anderen Weg, der in der Vorlesung bereits vorgeführt wurde, und der auf die Situation von *explizit* gegebenen Untervektorräumen zugeschnitten ist.

Wir suchen einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der sowohl in U als auch in W liegt, der sich also sowohl als Element von U als auch als Element von W darstellen läßt. Dies bedeutet, daß es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ geben soll mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (= v).$$

Diese Gleichung läßt sich als lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ auffassen, denn sie ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann man auf die übliche Art und Weise lösen; die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit beliebigem } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Daß in dieser Lösung genau *ein* freier Parameter auftaucht, entspricht genau dem Umstand, daß $U \cap W$ von *einem einzigen* Vektor erzeugt sein wird – was in diesem Beispiel so ist, im allgemeinen (für beliebige Untervektorräume $U, W \subset \mathbb{R}^n$ aber nicht zutreffen muß – in welchem Fall dann eine Aufgabenstellung wie die unsere nicht sinnvoll wäre.

Das allgemeine Element von $U \cap W$ hat also die Form

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$. Damit tut der Vektor $v := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ das Gewünschte, denn es ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

(Genauso gut und tintensparend könnte man v durch sein Negatives $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ersetzen, aber das ist pure Kosmetik.)

Aufgabe Ü-4. Diese Aufgabe läßt sich mit den beiden Verfahren lösen, die in Aufgabe T-4 vom 8. Tutoriumsblatt vorgestellt wurden. Anstatt diese Verfahren erneut vorzurechnen, fasse ich sie kurz zusammen und weise auf einen wesentlichen Unterschied zwischen ihnen hin:

- Erstes Verfahren (Aufgabe T-4 a) vom 8. Tutoriumsblatt): Man weist von Hand nach, daß die beiden gegebenen Erzeuger von U im Untervektorraum W enthalten sind (dies beweist $U \subset W$), und daß die beiden gegebenen Erzeuger von W im Untervektorraum U enthalten sind (dies beweist $W \subset U$, womit dann $U = W$ bewiesen ist).
- Zweites Verfahren (Aufgabe T-4 b) vom 8. Tutoriumsblatt): Man überführt die gegebenen expliziten Darstellungen der Untervektorräume U und W in implizite Darstellungen und vergleicht diese.

Wesentlich ist nun die Tatsache, daß das erste Verfahren *immer* funktioniert, das sehr elegante zweite Verfahren jedoch nicht: Denn es kann sein, daß zwei *verschiedene* implizite Darstellungen *denselbe* Untervektorraum bezeichnen. Dies ist noch relativ gut kontrollierbar bei Untervektorräumen, die durch eine einzige Gleichung beschrieben werden, denn daß beispielsweise die Untervektorräume

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$$

übereinstimmen, kann man noch ganz gut erkennen (beide Gleichungen sind bis auf einen Faktor -2 identisch). Daß aber die beiden Untervektorräume

$$\left\{x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -7 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = 0\right\} \quad \text{und} \quad \left\{x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot x = 0\right\},$$

übereinstimmen (vgl. Lösung zu Aufgabe T-1 b) vom 9. Tutoriumsblatt), ist schon überhaupt nicht mehr offensichtlich! (Im Prinzip ist dafür nachzuweisen, daß die beiden Gleichungssysteme die gleiche Lösungsmenge haben; dies kann man beispielsweise dadurch zeigen, daß man das eine Gleichungssystem durch elementare Zeilenumformungen in das andere überführt.)