Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

a) U_1 ist tatsächlich ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$; der Beweis verläuft genauso wie in Aufgabe T-2 a) vom 7. Tutoriumsblatt.

b) U_2 ist kein Untervektorraum, da beispielsweise der Nullvektor nicht enthalten ist.

c) U_3 ist kein Untervektorraum, da die Abgeschlossenheit bezüglich der Bildung von Summen verletzt ist: Beispielsweise liegen $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ und $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ in U_3, ihre Summe $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ jedoch nicht.

d) U_4 *ist* ein Untervektorraum! Das widerspricht möglicherweise (sogar hoffentlich!) ein wenig der Intuition, weil in der Definition Produkte von Koordinaten auftreten (der Ausdruck $x_2 \cdot x_3$), die normalerweise dafür sorgen, daß Unterraumeigenschaften nicht erfüllt sind. Die Zusatzbedingung $x_2 = 0$ behebt dieses Problem jedoch: Es gilt nämlich die Äquivalenz

$$x_1 = x_2 \cdot x_3 \ \wedge \ x_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$$

(beide Implikationsrichtungen lassen sich mühelos nachprüfen), also ist

$$U_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = 0 \right\},$$

und daß diese Menge ein Untervektorraum ist, ist nicht mehr überraschend (und kann mit dem gleichen Verfahren wie in a) bewiesen werden).

Aufgabe Ü-2.

a) Zur Begründung kann wieder ein direktes Nachrechnen mittels des Untervektorraumkriteriums herangezogen werden; vielleicht noch einfacher ist aber die Erkenntnis, daß ein „und" in einer Mengendefinition der Bildung einer *Schnittmenge* entspricht:

$$\begin{aligned}&\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - x_4 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}\\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Da der Schnitt zweier Untervektorräume wieder ein Untervektorraum ist, genügt es zu zeigen, daß jede der beiden geschnittenen Mengen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Dies ist aber eine Aufgabe, wie sie schon oft behandelt wurde (Aufgabe Ü-1 und Aufgabe T-2 vom 7. Tutoriumsblatt).

Zur expliziten Angabe der in U enthaltenen Elemente bemerken wir, daß U nach Definition die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

ist. Dieses Gleichungssystem ist erfreulicherweise bereits in Zeilenstufenform gegeben: Also sind $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ freie Parameter, und der Reihe nach ergibt sich

$$\begin{aligned} x_4 &= \mu, \\ x_3 &= \lambda, \\ x_2 &= x_3 + x_4 = \lambda + \mu, \\ x_1 &= x_4 - x_2 = \mu - (\lambda + \mu) = -\lambda, \end{aligned}$$

also erhalten wir

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \mu + \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ebenso ergibt sich aus der Darstellung von W als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung (explizite Darstellung)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \cdot (\lambda + \mu) \\ \mu + \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Wir bestimmen *alle* Elemente des Durchschnitts $U \cap W$, indem wir bemerken, daß der Schnitt von U aus W aus den *gemeinsamen* Lösungen beider Gleichungssysteme besteht, also aus den Lösungen desjenigen Gleichungssystems, das durch „Untereinanderschreiben" der beiden Systeme entsteht:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \curvearrowright &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier gibt es nur einen freien Parameter (damit zeichnet sich schon ab, daß $U \cap W$ tatsächlich aus den Vielfachen *eines* Vektors bestehen wird!), und zwar ergibt sich die Lösungsmenge

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also tut der Vektor $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

Eine alternative Methode der Berechnung von $U \cap W$ wurde in der Vorlesung vorgeführt; hierbei werden nicht die gegebenen „impliziten" Darstellungen der Untervektorräume U und W verwendet, sondern die in a) berechneten „expliziten" Darstellungen: Wir suchen alle Vektoren, die sich *sowohl* als Element von U *als auch* als Element von W schreiben lassen; d.h. wir suchen alle möglichen reellen Zahlen $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ mit

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \mu_1 + \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (\lambda_2 + \mu_2) \\ \mu_2 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den vier Unbekannten $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$, das sich auf die übliche Art lösen läßt. Das Resultat ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem beliebigen } \alpha \in \mathbb{R},$$

so daß das allgemeine Element von $U \cap W$ die Form

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \mu_1 + \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha - 2\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder, von der anderern Seite rechnend,

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot (\lambda_2 + \mu_2) \\ \mu_2 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2\alpha + \alpha) \\ \alpha - 2\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich also das gleiche Resultat wie bei unserer ersten Rechnung.

Aufgabe Ü-3.

a) Um nachzuweisen, daß U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist, verwenden wir das Untervektorraumkriterium: Die Nullmatrix liegt in U, weil sie sich bei Transponieren nicht ändert. Gilt $A, B \in U$, so ist $(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T} = A + B$ nach den Rechenregeln für die Transponierte, also $A + B \in U$, und ebenso ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $(\lambda \cdot A)^\mathsf{T} = \lambda \cdot A^\mathsf{T} = \lambda \cdot A$, also $\lambda \cdot A \in U$.

   Der Beweis für W verläuft ganz analog.

b) Für jedes $A \in V$ ist $(A + A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + (A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + A = A + A^\mathsf{T}$, also $A + A^\mathsf{T} \in U$.
   Ebenso ist $(A - A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} - (A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} - A = -(A - A^\mathsf{T})$, also $A - A^\mathsf{T} \in W$.

c) Ist $B \in U \cap W$, so gilt $B = B^\mathsf{T} = -B$, also $2B = 0$ und damit $B = 0$. Also ist $U \cap W = \{0\}$. (Genau genommen, haben wir nur $U \cap W \subset \{0\}$ bewiesen, aber die andere Inklusion ist klar – es handelt sich um Untervektorräume! Und: Mit $\{0\}$ ist natürlich die Menge gemeint, die nur die Null*matrix* enthält.)

   Ich behaupte, daß $U + W = V$ ist, daß sich also jede Matrix $A \in V$ als Summe einer Matrix aus U und einer Matrix aus W schreiben läßt. Dies folgt aber aus b): Denn wir wissen, daß $A + A^\mathsf{T} \in U$ und $A - A^\mathsf{T} \in W$ gilt; die Summe dieser beiden Matrizen ist jedoch $2A$, so daß man mittels Division durch 2 erhält

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^\mathsf{T})}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^\mathsf{T})}_{\in W} \in U + W.$$

Aufgabe Ü-4. Für $n = 1$ ist $U = \{0\} \subset \mathbb{R}$ (denn die Determinante einer 1×1-„Matrix“, d.h. einer reellen Zahl, ist einfach die Zahl selbst), und dies ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$.
Für $n \geq 2$ ist U *kein* Untervektorraum, und zwar ist von den Voraussetzungen des Unterraumkriteriums die Abgeschlossenheit bezüglich der Bildung von *Summen* verletzt. Dies kann man beispielsweise einsehen anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

die man für jedes $n \geq 2$ bilden kann: Da sie jeweils zwei gleiche Spalten bzw. Zeilen enthalten, gilt $\det(A) = 0 = \det(B)$, also $A, B \in U$. Es ist jedoch $A + B \notin U$, denn es ist

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

und damit $\det(A + B) = -2^n \neq 0$, also $A + B \notin U$.