Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1. Der Rechenweg in a) wurde bereits in der Lösung zu Aufgabe Ü-2 vom 3. Übungsblatt mehrfach vorgerechnet; darum beschränke ich mich auf die Angabe der Ergebnisse zu b): Es ist $\det A_\alpha = -\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha = -\alpha \cdot (\alpha - 1)^2$, also ist die Matrix für $\alpha \notin \{0, 1\}$ invertierbar, und für die Inverse ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot (a-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Ü-2.

a) Man erhält $\det A = t^2 + 1$; da für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $t^2 + 1 \geq 1$, verschwindet diese Determinante nie, d.h. A ist stets invertierbar.

b) Es ergibt sich

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & t^2+1 & -t^2 & -t^3 - t \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & t^2+1 \end{pmatrix}$$

c) Die Lösung verlauft exakt so wie diejenige von Aufgabe T-2 vom 6. Tutoriumsblatt, weshalb ich nur das Ergebnis angebe: Man erhält (hoffentlich bei beiden Rechenwegen!)

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Ü-3.

a) Für jedes i ist der Nenner des Ausdrucks, der $f_i(x)$ definiert, einfach eine Zahl; der Zähler ist ein Produkt von $n-1$ Polynomen vom Grad 1. Also handelt es sich insgesamt um ein Polynom vom Grad $n-1$.

Es ist

$$f_i(x_i) = \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} = 1,$$

da Zähler und Nenner identisch sind, sowie für $j \neq i$ (Vorsicht, nun darf j nicht mehr als Laufindex verwendet werden!)

$$f_i(x_j) = \frac{\prod\limits_{k \neq i} (x_j - x_k)}{\prod\limits_{k \neq i} (x_i - x_k)} = 0,$$

denn der Zähler enthält (in dem Moment, in dem die Laufvariable k beim Wert j vorbeikommt) den Faktor $x_j - x_j = 0$.

b) Wir haben in a) Polynomfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ vom Grad $n-1$ konstruiert, für die $f_i(x_i) = 1$ und $f_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$ gilt. Wenn man nun die Linearkombination

$$f := y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_n \cdot f_n$$

(was eine Kurzschreibweise für

$$f(x) := y_1 \cdot f_1(x) + \ldots + y_n \cdot f_n(x)$$

ist) aus ihnen bildet, so ergibt sich ein Polynom, das immer noch Grad $\leq n-1$ hat (beim Addieren von Polynomen kann sich der Grad vielleicht verringern, jedoch niemals erhöhen), und für das gilt

$$f(x_i) = y_1 \cdot \underbrace{f_1(x_i)}_{=0} + \ldots + y_i \cdot \underbrace{f_i(x_i)}_{=1} + \ldots + y_n \cdot \underbrace{f_n(x_i)}_{=0} = y_i$$

für alle i.

Aufgabe Ü-4. Ich führe beide vorgeschlagenen Lösungswege vor:
Lösung mit Aufgabe Ü-3. In der Situation von Aufgabe Ü-3 ist nun $n = 4$, und zwar ist $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} = \frac{x^3+x^2-4x-4}{-6}, \\
f_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{6}, \\
f_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(2-1)(2+1)(2+2)} = \frac{x^3+2x^2-x-2}{12}, \\
f_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(-2-1)(-2+1)(-2-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{-12},
\end{aligned}$$

und nach der Lösung von Aufgabe Ü-3 b) funktioniert die folgende Wahl von f:

$$\begin{aligned}
f &= 1 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 9 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4 \\
&= \frac{x^3+x^2-4x-4}{-6} + \frac{x^3-x^2-4x+4}{2} + 3 \cdot \frac{x^3+2x^2-x-2}{4} + \frac{x^3-2x^2-x+2}{-12} \\
&= x^3 + x^2 - 2x + 1.
\end{aligned}$$

Lösung mit Aufgabe T-4 c) vom 6. Tutoriumsblatt. Wir machen den unbestimmten Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit noch unbekannten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Diese sind nun so zu wählen, daß gilt:

$$\begin{aligned}
1 &\stackrel{!}{=} f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\
&= a + b + c + d, \\
3 &\stackrel{!}{=} f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \\
&= -a + b - c + d, \\
9 &\stackrel{!}{=} f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\
&= 8a + 4b + 2c + d, \\
1 &\stackrel{!}{=} f(-2) = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d \\
&= -8a + 4b - 2c + d.
\end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die (laut Aufgabe T-3 c) vom 6. Tutoriumsblatt existierende und eindeutig bestimmte) Lösung dieses Gleichungssystems kann man auf die übliche Art ermitteln; es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit $f(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 1$ – zum Glück die gleiche Lösung wie beim alternativen Rechenweg.