Lineare Algebra und analytische Geometrie I
6. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1 (Staatsexamen Herbst 2009).
Man untersuche die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

auf Invertierbarkeit und bestimme gegebenenfalls die dazu inverse Matrix

a) mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen,

b) mit Hilfe der Determinante und der komplementären Matrix.

Aufgabe Ü-2. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

a) Man zeige, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

b) Man bestimme die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

c) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe Ü-3. Es sei $n \geq 1$, und es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene feste Zahlen. Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei die Funktion $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_i(x) := \frac{\prod\limits_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

a) Man zeige: Jedes f_i ist eine Polynomfunktion vom Grad $n-1$, und es gilt $f_i(x_i) = 1$ sowie $f_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$.

b) Man verwende a), um zu beweisen: Sind $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n-1$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe Ü-4. Man finde eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3 mit $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 9$ und $f(-2) = 1$.
(Hinweis: Man kann entweder Aufgabe Ü-3 von diesem Übungsblatt verwenden, oder man benutzt die Technik aus Aufgabe T-3 c) vom 6. Tutoriumsblatt. Dort wurde übrigens auch beweisen, daß die gesuchte Funktion eindeutig bestimmt ist.)
Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 5. Dezember 2014, 18 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!