Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

a) Eine Möglichkeit ist es, in der Matrix A den sich aus $a+b+c=0$ ergebenden Ausdruck $c=-a-b$ für c einzusetzen und direkt nachzurechnen, daß

$$\det\begin{pmatrix} a & -a-b & b \\ b & a & -a-b \\ -a-b & b & a \end{pmatrix} = 0$$

ist. Eleganter ist jedoch das folgende Verfahren: Daß $a+b+c=0$ ist, bedeutet genau, daß

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist. Damit kann aber A nicht mehr invertierbar sein, denn sonst hätte die Gleichung $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.

b) Beispielsweise mit der Regel von Sarrus erhält man

$$\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Ist nun $\det A = 0$ und $a = 0$, so folgt $b^3 + c^3 = 0$, also $c^3 = -b^3 = (-b)^3$ und damit $c = -b$, also $a + b + c = 0 + b + (-b) = 0$.

c) Nein, beispielsweise für $a = b = c = 1$ ist die Matrix A sicherlich nicht invertierbar (sie hat lauter gleiche Zeilen), ohne daß $a + b + c = 0$ gilt.

Vergleicht man die Determinante aus b) mit der Aussage aus a), so ergibt sich: Der Ausdruck $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ verschwindet, wenn $a + b + c = 0$ ist. Dies ist nicht nur auf den ersten Blick überraschend; wenn man aber weiß, daß

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

gilt, so wird es erklärlich. Allerdings ist diese Produktzerlegung wiederum selbst etwas rätselhaft – wer kann ihre Herkunft erklären?

Aufgabe Ü-2.

a) Entwickelt man die Determinante nach der ersten Zeile, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + (-1)^{n+1} \cdot a,\end{aligned}$$

denn die beiden Streichungsmatrizen sind Dreicksmatrizen (eine untere und eine obere), deren Determinante also jeweils einfach das Produkt der Diagonaleinträge und damit 1 ist.

b) Wir numerieren wir die Teilnehmer mit $1, \ldots, n$ durch und nennen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die jeweils von den Teilnehmern gewählten geheimen Zahlen. Der Zauberer bekommt nun die Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_n, \\ s_2 &= x_2 + x_1, \\ s_3 &= x_3 + x_2, \\ &\vdots \\ s_n &= x_n + x_{n-1} \end{aligned}$$

genannt. Um daraus die geheimen Zahlen zu rekonstruieren, möchte Linalgini aus diesem System die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ berechnen. Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & s_1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & s_n \end{array}\right).$$

Wir wissen jedoch aus a), daß die Determinante der Matrix des Gleichungssystems den Wert $d := 1 + (-1)^{n+1} \cdot 1 = 1 + (-1)^{n+1}$ hat. Ist n ungerade, so ist $n + 1$ gerade und $d = 1 + 1 = 2$, so daß die Matrix invertierbar und das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Ist n gerade, so ist $d = 1 + (-1) = 0$, so daß das Gleichungssystem keine eindeutig bestimmte Lösung hat. (Es gibt sicher eine Lösung, nämlich die „richtigen" geheimen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, jedoch zusätzlich viele weitere.) Dies kann man auch an einem konkreten Beispiel sehen: Ist beispielsweise $n = 4$ und $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, so werden dem Zauberer die Summen $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$ genannt. Die gleichen Summen ergeben sich jedoch auch, wenn beispielsweise $x_1 = x_3 = 2$ und $x_2 = x_4 = 0$ ist. Also ist es unmöglich, nur aus den paarweisen Summen die geheimen Zahlen zu rekonstruieren.

Ist n ungerade, so kommt Linalgini sogar ohne die Theorie aus der Linearen Algebra aus: Er muß nur auf die Idee kommen, die sogenannte alternierende Summe

$$s_1 - s_2 + s_3 - \ldots - s_{n-1} + s_n$$

zu bilden. (Daß die letzten beiden Summanden s_{n-1} und s_n mit den angegebenen Vorzeichen erscheinen, ist wesentlich und liegt daran, daß n ungerade ist!) Diese Summe hat nämlich den Wert

$$(x_1 + x_n) - (x_2 + x_1) + (x_3 + x_2) - \ldots - (x_{n-1} + x_{n-2}) + (x_n + x_{n-1}) = 2x_n,$$

so daß Linalgini den Wert x_n berechnen kann und, von ihm ausgehend, der Reihe nach auch alle anderen geheimen Zahlen.

Aufgabe Ü-3. Die beschriebene Matrix hat (vgl. das 5. Zentralübungsblatt, Aufgabe 4) die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

es stehen also Einsen auf den beiden Nebendiagonalen und überall sonst Nullen.
Wir bezeichnen die Determinante der Matrix mit d_n, um die Abhängigkeit von n bezeichnen zu können. Um sie zu berechnen, starten wir mit Entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten

$$d_n = -\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}} \quad (\dots \text{nun Entwickeln nach der ersten Spalte}\dots)$$

$$= -\det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}} = -d_{n-2}.$$

Diese Rechnung funktioniert für $n \geq 3$, so daß wir als Zwischenergebnis notieren:

$$d_n = -d_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Nun können wir vollständige Induktion nach n verwenden. Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ ist

$$d_1 = \det \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\text{sowie} \quad d_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 = (-1)^{2/2},$$

so daß die Formel in diesen Fällen stimmt. Für den Induktionsschritt $(1, \dots, n-1) \to n$ (es würde $(n-2, n-1) \to n$ genügen) für $n \geq 3$ nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:

- Ist n ungerade, so ist auch $n-2$ ungerade, und damit ist $d_n = -d_{n-2} = -0 = 0$, wie behauptet.
- Ist n gerade, so ist auch $n-2$ gerade, und damit ist $d_n = -d_{n-2} = -(-1)^{(n-2)/2} = (-1)^1 \cdot (-1)^{n/2-1} = (-1)^{n/2}$, wie behauptet.

Aufgabe Ü-4.

a) Es ist $k := 24 = (11000)_2$. Definieren wir, wie in Aufgabe 4 vom 5. Tutoriumsblatt, die Matrizen P_i für $i \geq 0$ durch $P_0 := A$ und $P_{i+1} := (P_i)^2$ für $i \geq 0$, so ist also nach der dortigen Aufgabe c)

$$A^{24} = (P_4)^1 \cdot (P_3)^1 \cdot (P_2)^0 \cdot (P_1)^0 \cdot (P_0)^0 = P_4 \cdot P_3.$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
P_0 &= A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
P_1 &= (P_0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
P_2 &= (P_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \\
P_3 &= (P_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}, \\
P_4 &= (P_3)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

und damit ergibt sich

$$
A^{24} = P_4 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28657 & 46368 \\ 46368 & 75025 \end{pmatrix}.
$$

(Insgesamt sind wir also zur Berechnung einer 24ten Potenz mit nur fünf Matrixmultiplikationen davongekommen.)

b) In Aufgabe Ü-4 vom 3. Übungsblatt wurde gezeigt, daß

$$
\begin{pmatrix} x_{24} \\ x_{25} \end{pmatrix} = A^{24} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28657 & 46368 \\ 46368 & 75025 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

ist. Man muß also nur die untere Zeile dieses Produktes berechnen und erhält $x_{25} = 75025$.