Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
5. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1 (Staatsexamen Frühjahr 2003). Es sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor und $A := \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

a) Man zeige: Ist $a + b + c = 0$, so ist A nicht invertierbar.

b) Man zeige: Ist A nicht invertierbar und $a = 0$, so gilt $a + b + c = 0$.

c) Kann in b) auf die Voraussetzung $a = 0$ verzichtet werden?

Aufgabe Ü-2 (nach einer Aufgabe vom Staatsexamen Frühjahr 2013).

a) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{für } i = j + 1, \\ a & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben; zu betrachten ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man zeige $\det A = 1 + (-1)^{n+1} a$, etwa unter Verwendung des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes.

b) Bei einer Vorstellung des Zauberers Linalgini sitzen $n \geq 3$ Menschen im Kreis. Linalgini fordert jeden auf, sich jeweils eine beliebige geheime Zahl zu denken, und sagt dann: „Wenn ich immer die Summe der geheimen Zahlen je zweier nebeneinandersitzender Teilnehmer kenne, weiß ich alle geheimen Zahlen.“

Man beweise, daß Linalgini recht hat, sofern n ungerade ist. Was passiert, wenn n gerade ist?

Aufgabe Ü-3. Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Man zeige mittels vollständiger Induktion

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aufgabe Ü-4. Es sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Man berechne A^{24} mit dem Verfahren aus Aufgabe T-4 vom 5. Tutoriumsblatt.

b) Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci-Zahlen (vgl. Aufgabe Ü-4 vom 3. Übungsblatt) berechne man x_{25} mit Hilfe von a).

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 28. November 2014, 18 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!