Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1. Wie üblich, arbeiten wir zunächst mit Zeilenumformungen und steigen dann auf Spaltenumformungen um (oder verwenden sogar beide Umformungen wild durcheinander). Das kann beispielsweise folgendermaßen aussehen:

$$
\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(Wie schon erwähnt, ist die einzige in der Äquivalenznormalform enthaltene Information die Anzahl der Einsen – die Zahl, die später als der *Rang* der Ausgangsmatrix bezeichnet werden wird.)
Für die Matrix B erhalten wir analog

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -24 & -18 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \mathrel{\rotatebox[origin=c]{180}{$\curvearrowleft$}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

(Insbesondere zeigt diese Rechnung, daß die Matrix B invertierbar ist, denn sie läßt sich mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix verwandeln. Das bedeutet rückwirkend auch, daß wir genausogut mit Zeilenumformungen ausgekommen wären.)

Aufgabe Ü-2.

a) Wir arbeiten mit Zeilenumformungen; in Hinblick auf Teil b) lohnt es sich, dabei möglichst sparsam mit den Zeilenumformungen umzugehen, und zu notieren, *welche* Umformungen wir verwenden:

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
&\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{I}-2\,\mathrm{II}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Damit ist A invertierbar mit

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.
$$

b) Für diese Aufgabe lohnt es sich, eine kleine Notation einzuführen: Wir bezeichnen mit $F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}$ diejenige Elementarmatrix (vom Format 3×3, wie der Kontext dieser Aufgabe nahelegt), die die Zeilenumformung $\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright}$ vermittelt. Dies ist eine Elementarmatrix vom Typ I; ganz analog bezeichnen wir die Elementarmatrizen jeder anderen möglichen Zeilenumformung.

Dann kann man die Rechnung aus Teil a) so lesen, daß für jeden Schritt eine neue Elementarmatrix links an den zuletzt erhaltenen Ausdruck multipliziert wird, womit sich ergibt:

$$
E_3 = F_{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \cdot F_{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}} \cdot F_{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \cdot F_{I-2\,\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}} \cdot F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \cdot A.
$$

Ebenso ergibt sich

$$
A^{-1} = F_{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \cdot F_{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}} \cdot F_{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \cdot F_{I-2\,\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}} \cdot F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \cdot E_3,
$$

aber das ist äquivalent zur ersten angegebenen Gleichung, wie bereits in der Vorlesung beschrieben, und zwar nach Bemerkung 2.22.)

Um diese Gleichung nach A aufzulösen, benötigen wir die Inversen der Elementarmatrizen. In der Vorlesung (Bemerkung 2.21) wurde, ohne die Verwendung unserer Notation, angegeben, wie diese Inversen aussehen: Elementarmatrizen vom Typ I sind gleich ihrer Inversen; bei Elementarmatrizen vom Typ II wird der Multiplikationsfaktor durch seinen Kehrwert ersetzt, bei Elementarmatrizen vom Typ III wird der Multiplikationsfaktor durch sein Negatives ersetzt. Das bedeutet

$$
\begin{aligned}
A &= \left(F_{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \cdot F_{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}} \cdot F_{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \cdot F_{I-2\,\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}} \cdot F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}\right)^{-1} \\
&= (F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}})^{-1} \cdot (F_{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}})^{-1} \cdot (F_{\mathrm{I}-2\,\mathrm{II}})^{-1} \cdot (F_{\mathrm{III}+\mathrm{II}})^{-1} \cdot (F_{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}})^{-1} \cdot (F_{\mathrm{II}-\mathrm{III}})^{-1} \\
&= F_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}+2\,\mathrm{I}} \cdot F_{\mathrm{I}+2\,\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \cdot F_{\mathrm{III}\cdot 4} \cdot F_{\mathrm{II}+\mathrm{III}}.
\end{aligned}
$$

(Vergleicht man die zuletzt erhaltene Formel mit der Rechenschrittfolge in a), erkennt man eine leichte Eselsbrücke: Man kann die Elementarmatrizen in der Reihenfolge übernehmen, in der man die Umformungen ausgeführt hat, muß nur jede der Umformungen durch ihr Gegenteil ersetzen.)

Jedenfalls haben wir damit die gesuchte Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gewonnen.

Aufgabe Ü-3.

a) Wegen der Vielzahl der möglichen Rechenwege gebe ich nur die Ergebnisse an: Es ist

$$\begin{aligned} \det A &= 24, \\ \det B &= -6, \\ \det C &= -1. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} \det(-A) &= (-1)^3 \cdot \det A = -24, \\ \det(AA^\mathsf{T}) &= \det(A) \cdot \det(A^\mathsf{T}) = \det(A) \cdot \det(A) = 24^2 = 576 \\ \det(BC) &= \det(B) \cdot \det(C) = -6 \cdot (-1) = 6. \end{aligned}$$

Aufgabe Ü-4. Wieder gibt es viele mögliche Rechenwege; ich gebe nur einen ersten empfehlenswerten Schritt vor und überlasse dann die weitere Rechnung der Leserin bzw. dem Leser:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 5! \cdot (\ldots \text{wilde Rechnung} \ldots) \\ &= 5! \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480. \end{aligned}$$

*

In Verallgemeinerung dieser Aufgabenstellung stelle ich die folgende

Weihnachts-Preisaufgabe: Für die eleganteste Herleitung einer allgemeinen Formel für die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(„die Einheitsmatrix nach Vertauschung von Nullen und Einsen“) setze ich hiermit ein Mittagessen in Institutsnähe aus. Teilnahmeberechtigt sind alle angemeldeten Studenten und Mitarbeiter der Vorlesung; Einsendeschluß (per Email an den Assistenten) ist der 19. Dezember 2014. Es dürfen auch theoretische Mittel verwendet werden, die in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden.