

## Lineare Algebra und analytische Geometrie I

### Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

**Aufgabe Ü-1.** Wir verwenden das Verfahren aus der Vorlesung: Man schreibt rechts neben die gegebene Matrix die Einheitsmatrix und formt dann beide so lange mit Zeilenumformungen um, bis links die Einheitsmatrix steht; wenn das gelingt, ist sie Ausgangsmatrix invertierbar, und ihre Inverse steht rechts; wenn es nicht gelingt (weil sich eine Nullzeile ergibt), ist die Ausgangsmatrix nicht invertierbar.

Für die Matrizen  $A$  und  $B$  versuche ich dabei, weil ich ungern mit Brüchen rechne, zuerst alle Nenner loszuwerden:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 2/3 & 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & -11 & -13 & 0 & -24 & 6 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 0 & 24 & -6 \\ 0 & 5 & 11 & -6 & 18 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 12 & -12 & -6 \\ 0 & 5 & 11 & -6 & 18 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 12 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 56 & -66 & 78 & 30 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 12 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -33/28 & 39/28 & 15/28 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 39/28 & 15/28 & -33/28 \\ 0 & 0 & 1 & -33/28 & 39/28 & 15/28 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15/28 & -33/28 & 39/28 \\ 0 & 1 & 0 & 39/28 & 15/28 & -33/28 \\ 0 & 0 & 1 & -33/28 & 39/28 & 15/28 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Also ist  $A$  invertierbar mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15/28 & -33/28 & 39/28 \\ 39/28 & 15/28 & -33/28 \\ -33/28 & 39/28 & 15/28 \end{pmatrix}.$$

Es ist durchaus bemerkenswert, daß die Matrix  $A^{-1}$  die gleiche Symmetrie aufweist wie die Ausgangsmatrix  $A$ . Ist das ein allgemeines Prinzip für Matrizen dieser Form?

\*

Für die Matrix  $B$  können wir die gleiche Rechnung verwenden:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & -2/3 & 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & 0 & 24 & 6 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir aufhören: Es hat sich eine Nullzeile ergeben, also ist die Matrix  $B$  (obwohl sie sich nur so „wenig“ von der Matrix  $A$  unterscheidet) nicht invertierbar.

\*

Das gleiche Verfahren schließlich ergibt, daß die Matrix  $C$  invertierbar ist mit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -7/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 5/8 & 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe Ü-2.** Wir verfahren wie in Aufgabe Ü-1 und müssen nur beobachten, wie sich der Parameter  $t$  auswirkt. Für die Matrix  $A_t$  ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & t-9 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-5 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

An dieser Stelle haben wir auf der linken Seite Zeilenstufenform erreicht, so daß man die Invertierbarkeit einfach daran ablesen kann, ob die Matrix eine Nullzeile besitzt. Das ist nur der Fall für  $t - 5 = 0$ , also für  $t = 5$ , so daß wir schon sehen: Die Matrix  $A_t$  ist genau dann invertierbar, wenn  $t \neq 5$  ist.

Zur Berechnung der Inversen müssen wir noch weiterrechnen:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t-5 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(t-5) & -2/(t-5) & 1/(t-5) \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (16-3t)/(t-5) & (2t-12)/(t-5) & 1/(t-5) \\ 0 & 1 & 0 & (2t-12)/(t-5) & (9-t)/(t-5) & -2/(t-5) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(t-5) & -2/(t-5) & 1/(t-5) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit ist (für  $t \neq 5$ )

$$A_t^{-1} = \frac{1}{t-5} \begin{pmatrix} 16-3t & 2t-12 & 1 \\ 2t-12 & 9-t & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

\*

Für die Matrix  $B_t$  können wir folgendermaßen rechnen (wir beginnen mit einer Zeilenvertauschung, um nicht gleich durch  $t$  dividieren zu müssen):

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} t & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1-t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-t & 1-t^2 & 1 & 0 & -t \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1-t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-t-t^2 & 1 & 1 & -t-1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ist  $t - 1 = 0$ , d.h.  $t = 1$ , so können wir keine Zeilenstufenform mit einfachen Stufenbreiten mehr erreichen, so daß  $B_t$  dann nicht invertierbar ist. Ist  $t \neq 1$ , so bleibt zu überprüfen, ob  $2 - t - t^2 = 0$  ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $t = 1$  oder  $t = -2$  ist (z.B. quadratische Lösungsformel!), so daß wir feststellen können:  $B_t$  ist invertierbar für alle  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ .

Um die Inverse zu bestimmen, rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1-t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-t-t^2 & 1 & 1 & -t-1 \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/(t-1) & -1/(t-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(2-t-t^2) & 0 & -t/(2-t-t^2) \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (t+1)/(t^2+t-2) & -1/(t^2+t-2) & -1/(t^2+t-2) \\ 0 & 1 & 0 & -1/(t^2+t-2) & t+1/(t^2+t-2) & -1/(t^2+t-2) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(t^2+t-2) & -1/(t^2+t-2) & (t+1)/(t^2+t-2) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist (für  $t \neq 1, -2$ )

$$B_t^{-1} = \frac{1}{t^2 + t - 2} \begin{pmatrix} t+1 & -1 & -1 \\ -1 & t+1 & -1 \\ -1 & -1 & t+1 \end{pmatrix}.$$

Für  $C_t$  schließlich zeigen ähnliche Rechnungen, daß die Matrix invertierbar ist für  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , und dann ist

$$C_t^{-1} = \frac{1}{t^2 \cdot (t^2 - 1)} \begin{pmatrix} -t^2 & t^3 & 0 & -t^3 \\ t^3 & -t^2 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & t \cdot (t^2 - 1) \\ -t^3 & t^2 & t \cdot (t^2 - 1) & 1 - 2t^2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe Ü-3.** Bei solchen Aufgaben lohnt es sich, die ersten paar Fälle per Hand auszuprobieren: Man erhält

$$(M_s)^2 = \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ms^2 & \dots & ms^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ms^2 & \dots & ms^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(M_s)^3 = \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ms^2 & \dots & ms^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ms^2 & \dots & ms^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2s^3 & \dots & m^2s^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^2s^3 & \dots & m^2s^3 \end{pmatrix}.$$

Damit gelangt man zur Vermutung, daß

$$(M_s)^n = \begin{pmatrix} m^{n-1}s^n & \dots & m^{n-1}s^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^{n-1}s^n & \dots & m^{n-1}s^n \end{pmatrix}$$

für alle  $n \geq 1$  gilt. Für  $n = 1, 2, 3$  haben wir das schon überprüft; für einen Induktionsschritt  $n - 1 \rightarrow n$  schließlich genügt die Rechnung

$$\begin{aligned} (M_s)^n &= M_s \cdot (M_s)^{n-1} = \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m^{n-2}s^{n-1} & \dots & m^{n-2}s^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^{n-2}s^{n-1} & \dots & m^{n-2}s^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m^{n-1}s^n & \dots & m^{n-1}s^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^{n-1}s^n & \dots & m^{n-1}s^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man kann das mit weniger Mühe bekommen: Zum einen kann man bemerken, daß  $M_s = s \cdot M_1$  ist, so daß es genügt, die Potenzen von  $M_1$  zu berechnen. (Deshalb ist es auch nicht erstaunlich, daß im Resultat der Faktor  $s^n$  enthalten sein wird.) Zum anderen kann man sich die Arbeit noch erleichtern, indem man ein für allemal ein Produkt von zwei Matrizen  $M_s$  und  $M_t$  für möglicherweise *verschiedene* Zahlen  $s, t$  berechnet. Dies ergibt

$$M_s \cdot M_t = \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & \dots & t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t & \dots & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mst & \dots & mst \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ mst & \dots & mst \end{pmatrix} = M_{mst}.$$

In Worten: Beim Multiplizieren von  $M_s$  und  $M_t$  werden die Parameter *miteinander* und dann noch mit dem Faktor  $m$  multipliziert. Von da ist es nun nicht mehr weit bis zur Erkenntnis, daß  $(M_s)^n = M_{m^{n-1} \cdot s^n}$  ist – wobei strenggenommen auch hier noch ein Induktionsargument fällig wäre.

#### Aufgabe Ü-4.

a) Wegen  $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$  wollen wir

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} + x_n \end{pmatrix},$$

weshalb es sinnvoll ist, die Matrix  $A$  so zu wählen, daß

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a + b \end{pmatrix}$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt. Nach einigem Starren auf diese Gleichung erkennt man, daß  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  das Gewünschte leistet.

b) Dies geht per Induktion: Für  $n = 1$  ist  $A^1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  richtig. Für den Schritt  $n - 1 \rightarrow n$  (für  $n > 1$ ) rechnen wir

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \left( A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

und wir sind fertig.