Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
3. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1. Man entscheide, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & -2/3 \\ -2/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü-2. Man entscheide in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimme in diesen Fällen die inverse Matrix:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & t \end{pmatrix} \qquad B_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \qquad C_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü-3 (Staatsexamen Herbst 2013). Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $s \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$M_s := \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m}$$

die $m \times m$-Matrix, bei der jeder Eintrag s ist. Man gebe eine Formel für

$$(M_s)^n = M_s \cdot \ldots \cdot M_s$$

(n Faktoren, $n \in \mathbb{N}$ beliebig) an und beweise diese.

Aufgabe Ü-4 (Fibonacci-Zahlen und Matrizen). Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen (die definiert ist durch $x_1 = x_2 = 1$ und $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ für $n \geq 2$).

a) Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß für alle $n \geq 2$ gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

b) Für die in a) gefundene Matrix A beweise man, daß

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(Bemerkung. Diese Aufgabe zeigt, daß man die Fibonacci-Zahlen direkt berechnen kann, sobald man eine effiziente Methode zur Berechnung von Potenzen der Matrix A findet. Wir werden später darauf zurückkommen.)

Die Lösungen sind spätestens am **Mittwoch, 12. November 2014, 18 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!