Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

a) Man kann die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen bearbeiten, ohne die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ zu verändern. Dabei lohnt es sich, die Segel so zu setzen, daß man Kurs auf die Zeilenstufenform nimmt. Also Leinen los!

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 16 & 16 & -16 \\ 0 & 18 & 18 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der letzte Umformungsschritt ist dabei im Prinzip nicht nötig (Zeilenstufenform ist schon davor erreicht); zum Rechnen bewährt es sich jedoch, durch weitere Zeilenumformungen sicherzustellen, daß jede Stufenspalte nur *einen* von Null verschiedenen Eintrag enthält – dies vereinfacht die Rechnungen beim Ermitteln der Lösungen.

Die allgemeinen Überlegungen über lineare Gleichungssysteme besagen nun, daß in einer Lösung die Werte von x_3 und x_4 beliebig gewählt werden dürfen, also $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$. Die zweite Zeile der Matrix liefert dann $x_2 + x_3 - x_4 = 0$, also $x_2 = x_4 - x_3 = \mu - \lambda$, und die erste Zeile liefert $-x_1 - x_3 - x_4 = 0$, also $x_1 = -x_3 - x_4 = -\mu - \lambda$.[1]

Damit lautet die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\mu - \lambda \\ \mu - \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Nein. Dies wäre nur dann der Fall, wenn die Zeilenstufenform der Matrix keine Nullzeile enthalten würde.

Aufgabe Ü-2.

[1] Dieser Schritt wäre ohne die letzte Matrixumformung genauso gut möglich, aber etwas rechenaufwendiger: Die erste Zeile der *vorletzten* Matrix liefert $-x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0$, also $x_1 = 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 5(\mu - \lambda) + 4\lambda - 6\mu = -\mu - \lambda$. Genau dieses erneute Einsetzen von $x_2 = \mu - \lambda$ erspart man sich durch das „Abräumen“ der Stufenspalten oberhalb ihres untersten Eintrags.

a) Die übliche Regel (die linke Matrix muß so viele Spalten enthalten wie die rechte Matrix Zeilen) liefert die folgenden möglichen Produkte:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 20 & 6 & -8 & -22 \\ 17 & 15 & 13 & 11 \\ -33 & -9 & 15 & 39 \end{pmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -22 & 27 \\ -10 & 5 \\ -27 & 25 \\ 23 & -3 \end{pmatrix},$$
$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 46 & 0 \\ 54 & 44 & -18 \end{pmatrix}.$$

b) Man erhält $A^3 - 5A^2 + 4A + E = 0$, was eine Kurzschreibweise ist für

$$A^3 - 5A^2 + 4A + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Später werden wir den Hintergrund dieser Aufgabe kennenlernen. Um ihn kurz anzudeuten: Betrachte das Polynom $f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x + 1$. Dann ist der von uns berechnete Ausdruck so etwas wie $f(A)$ – man kann Matrizen in Polynome einsetzen! Was nun das Polynom f mit der Matrix A zu tun hat, sehen wir, wenn es später um Eigenwerte und das „charakteristische Polynom“ einer Matridx geht, genau darum handelt es sich hier nämlich.

Aufgabe Ü-3.

a) Es ist nach Vereinbarung $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$ und entsprechend $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Beim Produkt $x \cdot y^\mathsf{T}$ wird aus einer $m \times 1$-Matrix und einer $1 \times n$-Matrix eine $m \times n$-Matrix.

Beim Produkt $x^\mathsf{T} \cdot y$ steht links eine $1 \times m$-Matrix und rechts eine $n \times 1$-Matrix. Dieses Produkt ist nur definiert, wenn $m = n$ ist, und dann ist das Resultat eine 1×1-Matrix, also ein Element von $\mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

b) Dies ist eine Anwendung der Assoziativität der Matrixmultiplikation:

$$\begin{aligned} M^2 &= M \cdot M \\ &= (x \cdot y^\mathsf{T}) \cdot (x \cdot y^\mathsf{T}) \\ &= x \cdot (y^\mathsf{T} \cdot x) \cdot y^\mathsf{T} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Nun ist, wie wir gesehen haben, $y^\mathsf{T} \cdot x$ einfach eine Zahl, und die Multiplikation einer $m \times 1$-Matrix mit einer „1×1-Matrix“ ist einfach die gewöhnliche Multiplikation „Bilden eines Vielfachen einer Matrix“. Also können wir weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \ldots &= (y^\mathsf{T} \cdot x) \cdot (x \cdot y^\mathsf{T}) \\ &= (y^\mathsf{T} \cdot x) \cdot M \\ &= c \cdot M \end{aligned}$$

mit $c = y^\mathsf{T} \cdot x = x^\mathsf{T} \cdot y$. (Die letzte Gleichheit entsteht durch Transponieren: Eine „1×1-Matrix“ ändert sich beim Transponieren nicht, und es ist $(y^\mathsf{T} \cdot x)^\mathsf{T} = x^\mathsf{T} \cdot y$.

Achtung: Das Argument, M^2 sei deshalb ein „Vielfaches" von M, weil $M^2 = M \cdot M$ die Form „M mal irgendetwas" hat, gilt nicht! Ein Vielfaches einer Matrix entsteht durch Multiplikation der Matrix mit einer *Zahl*, nicht mit einer anderen Matrix.

Also ist $M^2 = c \cdot M$; damit $M^2 = 0$ ist, muß also entweder $c = 0$ sein, also $x^\top \cdot y = 0$, oder M muß die Nullmatrix sein (aber man kann sich überlegen, daß letzteres nur dann der Fall ist, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist, und dann ist ebenfalls $x^\top \cdot y = 0$).

Es ist also genau dann $M^2 = 0$, wenn $x^\top \cdot y = 0$ ist. (In der Schule wurde das so gedeutet, daß x und y „aufeinander senkrecht stehen" – wir werden im Rahmen der analytischen Geometrie auf diese geometrischen Deutungen zu sprechen kommen.)

c) Nach b) genügt es, M so zu wählen wie dort, wenn $x, y \in \mathbb{R}^4$ zwei geeignete Vektoren mit $x^\top \cdot y = 0$ sind. Beim Ausrechnen von $M = x \cdot y^\top$ sieht man, daß die Forderung, M solle keine Null enthalten, dadurch zu erreichen ist, daß man sicherstellt, daß weder x noch y eine Null enthalten. Wir können also beispielsweise

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nehmen; dann ist

$$c = x^\top \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0,$$

also wird $M^2 = c \cdot M = 0$ sein. Ausgeschrieben ist

$$M = x \cdot y^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü-4.

a) Jede Zeile von $A = x \cdot y^\top$ ist ein Vielfaches des Zeilenvektors $y^\top$: Ist nämlich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

so ist

$$A = x \cdot y^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \cdot y^\top = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y^\top \\ \vdots \\ x_m \cdot y^\top \end{pmatrix},$$

wobei im letzten (etwas unorthodox notierte) Ausdruck jeder Eintrag für eine ganze *Zeile* steht (denn $y^\top$ ist ja keine Zahl, sondern ein Zeilenvektor).

Ist nun ein Eintrag von x verschieden von Null, etwa $x_i \neq 0$, so ist jede Zeile von A ein Vielfaches der i-ten Zeile $x_i \cdot y^\top$. Ist dagegen $x = 0$, so ist sowieso $A = 0$, und alle Zeilen sind Vielfache voneinander.

b) Es seien $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}^{1\times n}$ die Zeilen von A, also (in wieder etwas unorthodoxer Schreibweise)

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}.$$

Hat nun A Zeilenrang ≤ 1, so gibt es eine Zeile – etwa z_i, die wir nur als z notieren wollen –, von der alle anderen Vielfache sind: Also $z_j = s_j \cdot z$ für alle j (dabei ist dann also $s_i = 1$), so daß die Matrix A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \cdot z \\ \vdots \\ 1 \cdot z \\ \vdots \\ s_m \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \cdot z.$$

Der letzte Schritt ist dabei *nicht* als das Herausziehen des „Faktors" z zu lesen, sondern folgendermaßen (am besten von rechts nach links): Ein Produkt „Spaltenvektor mal Zeilenvektor" wird gebildet, indem lauter Vielfache des Zeilenvektors untereinandergeschrieben werden, wobei die Faktoren aus dem Spaltenvektor stammen.

Damit ist $A = x \cdot y^\mathsf{T}$ mit

$$x := \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad y := z^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n.$$

(Insgesamt zeigen a) und b), daß A genau dann Zeilenrang ≤ 1 hat, wenn $A = x \cdot y^\mathsf{T}$ mit gewissen $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ hat.)

c) Hat A Zeilenrang ≤ 1, so ist nach b) $A = x \cdot y^\mathsf{T}$ für geeignete x, y. Dann ist aber $A^\mathsf{T} = (x \cdot y^\mathsf{T})^\mathsf{T} = y \cdot x^\mathsf{T}$, und Anwendung von a) zeigt, daß A^T dann Zeilenrang ≤ 1 hat.

d) Ist A quadratisch vom Zeilenrang ≤ 1, so ist $A = x \cdot y^\mathsf{T}$ mit geeigneten $x, y \in \mathbb{R}^n$. In Aufgabe Ü-3 b) haben wir jedoch gezeigt, daß Matrizen dieser Form sich beim Quadrieren nur vervielfachen.