Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 9. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Diese Aufgabe besteht im Wesentlichen im Lösen eines homogenen linearen Gleichungssystems: Das Gaußsche Verfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können also $x_5 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ beliebig wählen und erhalten dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} x_5 &= \lambda, \\ x_4 &= \mu, \\ x_3 &= \frac{1}{2} \cdot (-3x_4 - 2x_5) = -\frac{3}{2}\mu - \lambda, \\ x_2 &= 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = \lambda - \mu, \\ x_1 &= -x_2 - x_3 - x_5 = \frac{5}{2}\mu - \lambda, \end{aligned}$$

also die allgemeine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mu - \lambda \\ \lambda - \mu \\ -\frac{3}{2}\mu - \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und damit die Lösungsmenge

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = U$$

ergibt. (Im letzten Umformungsschritt haben wir den zweiten Erzeuger durch sein Doppeltes ersetzt, um die unschönen Brüche loszuwerden. Je nachdem, welche Umformungsschritte bei der Ermittlung der Zeilenstufenform gewählt wurden, kann man auch andere Erzeuger erhalten.)

b) Hier sind alle Vektoren $x = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^5$ zu suchen, für die das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & b_4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & b_5 \end{array}\right)$$

lösbar ist, denn eine Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ entspricht genau einer Darstellung von x als Linearkombination

$$x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

der vier erzeugenden Vektoren von W.

Zur Feststellung der Lösbarkeit formen wir das Gleichungssystem um:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & b_4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & b_5 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & -6 & 2 & -8 & b_4 - 4b_1 \\ 0 & -5 & 1 & -6 & b_5 - 3b_1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & b_2 - 2b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & b_4 - 4b_1 - 6b_3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 & b_5 - 3b_1 - 5b_3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_5 - b_4 + b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & b_2 - 2b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & b_4 - 4b_1 - 6b_3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_5 - b_4 + b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5b_1 + b_2 + 3b_3 - 7b_4 + 7b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6b_1 + 4b_3 - 9b_4 + 10b_5 \end{array}\right)$$

Hier ist Zeilenstufenform erreicht, und nach den üblichen Lösbarkeitskriterien ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $5b_1 + b_2 + 3b_3 - 7b_4 + 7b_5 = 0$ und $6b_1 + 4b_3 - 9b_4 + 10b_5 = 0$ ist. Das bedeutet insgesamt, daß

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -7 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

ist. Als Rechenkontrolle kann man überprüfen, daß die vier angegebenen erzeugenden Vektoren von W alle dieses Gleichungssystem lösen.

(Man kann das erhaltene Gleichungssystem auch noch durch Zeilenumformungen bearbeiten, um etwas übersichtlichere Zahlen zu erhalten; das liefert dann beispielsweise

$$\begin{aligned} W &= \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}, \end{aligned}$$

aber das ist nur Kosmetik. Wichtig ist allerdings, sich klarzumachen, daß es – wie man hier sieht – *verschiedene* richtige Lösungen gibt!)

Aufgabe T-2.

a) Laut Vorlesung sind n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (beidemale ist die Zahl n, das ist wesentlich!) genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete Matrix invertierbar ist. Wir müssen also nur die Determinante dieser Matrix berechnen: Es ist

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} = \ldots = t - 5,$$

also sind die drei Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn $t \neq 5$ ist.

b) Tatsächlich sind also für $t = 4$ und $t = 6$ die drei Vektoren linear unabhängig. Da nun n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ auch genau dann ein Erzeugendensystem bilden, wenn die aus ihnen gebildete Matrix invertierbar ist (was wiederum, wie gesagt, äquivalent ist zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren), liefert das die gesuchte Begründung.

Zur Bestimmung der Darstellung des Einheitsvektors e_1 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen; die Einträge des Lösungsvektors bilden die Koeffizienten (Koordinaten) der gesuchten Darstellung. Anstelle dies durchzuführen und für die Vektoren e_2, e_3 zu wiederholen, zeige ich einen kleinen Trick: Wenn wir nämlich alle drei Gleichungssysteme gleichzeitig zu lösen versuchen, suchen wir eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \cdot X \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Damit ist aber klar, daß wir einfach die gegebene Matrix invertieren müssen (mit einem beliebigen der uns bekannten Verfahren), daß also

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \frac{1}{t-5} \begin{pmatrix} 2t-9 & 3-t & 1 \\ 3-t & t-1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Speziell für $t = 4$ heißt das

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und für $t = 6$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet: Für $t = 4$ ist

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 + v_2 - v_3 \\ e_2 &= v_1 - 3v_2 + 2v_3 \\ e_3 &= -v_1 + 2v_2 - v_3, \end{aligned}$$

und für $t = 6$ ist

$$\begin{aligned} e_1 &= 3v_1 - 3v_2 + v_3, \\ e_2 &= -3v_1 + 5v_2 - 2v_3, \\ e_3 &= v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

c) Für $t = 5$ liegt ein Vektor $x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ genau dann in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 3 & 5 & b_3 \end{array}\right)$$

lösbar ist. Mit dem gleichen Verfahren wie in Aufgabe T-1 b) kann man zeigen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ ist, also ist

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}.$$

Zur Ermittlung der Koeffizienten aller Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

zu lösen. Mit kurzer Rechnung erhält man die allgemeine Lösung $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß die allgemeine verschwindende Linearkombination von v_1, v_2, v_3 lautet

$$\lambda v_1 - 2\lambda v_2 + \lambda v_3 = 0 \quad \text{für beliebiges } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Daß als Koeffizienten dieser Linearkombination die gleichen Zahlen auftreten wie in der impliziten Gleichung für den Untervektorraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, ist kein Zufall, wurde jedoch in der Vorlesung bislang nicht ausdrücklich thematisiert. Wer findet eine Erklärung?)

Für $t = 6$ sind, wie gesagt, v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, also ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$. (Dies *ist* eine implizite Darstellung, nämlich mittels eines Gleichungssystems „aus null Gleichungen“!) Da aber die Vektoren auch linear unabhängig sind, ist die einzige Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von ihnen einfach $0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$.

Aufgabe T-3. Damit man eine Chance auf lineare Unabhängigkeit hat, muß man auf jeden Fall zwei *verschiedene* Einheitsvektoren zu v_1, v_2 hinzunehmen; dabei kommt es aber auf die Reihenfolge nicht an. Damit sind also die sechs Matrizen $A_{k\ell} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & e_k & e_\ell \end{pmatrix}$ mit $1 \le k < l \le 4$ auf ihre Invertierbarkeit zu untersuchen. Das ist eine reine Fleißaufgabe (Berechnung von sechs 4×4-Determinanten); es ergibt sich, daß diese Matrizen invertierbar sind *außer* A_{13}, so daß man zwei beliebige Einheitsvektoren hinzunehmen darf *außer* der Kombination „e_1 und e_3".

Daß die „meisten", auch zufällig gewählten Vektoren zu zwei gegebenen Vektoren linear unabhängig sein werden, ist ein allgemeines Phänomen; man kann nämlich in einem sehr allgemeinen Sinn beweisen, daß eine „zufällig hingeschriebene" quadratische Matrix „normalerweise" invertierbar sein wird.

Aufgabe T-4.

a) Dies ist mit den *impliziten* Darstellungen kein Problem: Man muß nur überprüfen, ob der Vektor v die entsprechenden Gleichungen erfüllt – beides ist nicht der Fall, also liegt v weder in U noch in W.

b) Dies ist mit den *expliziten* Darstellungen leicht, denn man muß nur jeweils fünf völlig beliebige Linearkombinationen der erzeugenden Vektoren hinschreiben. (Es kann höchstens passieren, daß man den gleichen Vektor auf zwei unterschiedliche Arten erhält, nämlich wenn die gegebenen Erzeuger nicht linear unabhängig sind.)

c) Die Summe ist mit den *expliziten* Darstellungen mühelos zu bestimmen, denn es gilt ganz allgemein $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle + \langle w_1, \ldots, w_s \rangle = \langle v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \rangle$. Also ist

$$\begin{aligned} U + W &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

d) Den Durchschnitt erhält man leicht aus den *impliziten* Darstellungen, denn es ist nur die gemeinsame Lösungsmenge zweier linearer Gleichungssysteme zu bestimmen, und diese ist einfach die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, das durch Untereinanderschreiben der einzelnen Koeffizientenmatrizen entsteht: Damit ist

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \\ &\quad \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}. \end{aligned}$$

(Daß man die Darstellungen in c) und d) jeweils noch ein ganzes Stück weit vereinfachen könnte, ist eine andere Geschichte – dies wird sich schon aus der in f) bewiesenen Tatsache $U \subset W$ ergeben, denn damit ist einfach $U + W = W$ und $U \cap W = U$.)

e) Hier benutzen wir die *explizite* Darstellung von U und die *implizite* Darstellung von W: Denn es genügt zu zeigen, daß die erzeugenden Vektoren von U in W enthalten sind, daß sie also das Gleichungssystem von W erfüllen. Dies ergibt sich aus der Rechnung

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Diese Rechnung ist hier etwas faul notiert: die rechte Matrix im Produkt enthält die beiden einzeln zu überprüfenden erzeugenden Vektoren von U als Spalten; entsprechend gehört die erste Spalte des Ergebnisses zum ersten, die zweite zum zweiten erzeugenden Vektor.)

f) Da schon $U \subset W$ gilt, bleibt nur zu überprüfen, ob $W \subset U$ ist. Dies ist nicht der Fall, wie man nun unter Benutzung der *expliziten* Darstellung von W und der *impliziten* Darstellung von U sehen kann: Denn für den erzeugenden Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$$

beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0,$$

wie man mühelos nachrechnen kann.