Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
9. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Wir kennen zwei verschiedene Arten, einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ zu beschreiben (vgl. auch das 8. Zentralübungsblatt):

- Unter einer *expliziten* Angabe (auch: Angabe in Parameterform) verstehen wir eine Angabe der Form
$$\begin{aligned} U &= \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \\ &= \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$
mit fest vorgegebenen Vektoren $v_1, \ldots, v_r$.

- Unter einer *impliziten* Angabe (auch: Angabe durch eine Gleichung) verstehen wir eine Angabe der Form
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$$
mit einer fest vorgegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{? \times n}$.

a) Man entscheide für jede der folgenden Teilmengen, ob sie einen Untervektorraum des zugehörigen $\mathbb{R}^n$ bilden, und wenn ja, ob er explizit oder implizit angegeben ist.

a) $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$

b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = x_3^2\}$

d) $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = x_3\}$

e) $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid A = 2A^\mathsf{T} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

f) $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det A = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

In e) und f) wird ein bißchen gemogelt, weil $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kein $\mathbb{R}^n$ ist – aber man kann sich durch die Überlegung helfen, daß $\mathbb{R}^{2\times 2}$ „bis auf die Schreibweise der Elemente“ im Wesentlichen das gleiche wie $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Man formuliere eine Anleitung, wie man die explizite Angabe eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^n$ in eine implizite Angabe übersetzen kann und umgekehrt.
(Beide Verfahren wurden in der Vorlesung an Beispielen vorgeführt, siehe 4.19 a) bzw. 4.13 b).)

(bitte wenden)

Aufgabe V-2. Man lese die Definition eines Erzeugendensystems eines Vektorraumes (4.23) sowie den Begriff der linearen Unabhängigkeit und die zugehörigen Kriterien (4.25, 4.26, 4.28 und 4.29) sorgfältig nach.

Aufgabe V-3.

a) Man lese und vergleiche sorgfältig die Kriterien für Erzeugendensysteme bzw. lineare Unabhängigkeit von Systemen aus n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (4.20, 4.30) und vollziehe den Beweis von 4.31 nach.

b) Man formuliere einen Satz, der die Aussagen von 4.22 *und* 4.32 in der Vorlesung prägnant zusammenfaßt.

Aufgabe V-4. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r \in V$. Man entscheide, welche der folgenden Aussagen äquivalent sind zur Aussage „$v_1, \ldots, v_r$ sind linear unabhängig".

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda v_1 + \ldots + \lambda v_r = 0 \implies \lambda = 0)$.

b) Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gilt
$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0).$$

c) Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gilt
$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0).$$

d) Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$.

e) Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ gilt
$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \implies \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_r = \mu_r)$$

Lösung: Korrekt sind b), c) und e).
Aussage a) bedeutet nur, daß der Vektor $v_1 + \cdots + v_r$ nicht der Nullvektor ist.
Aussage d) ist *immer* erfüllt, man kann nämlich einfach $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ nehmen.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1.

a) Man berechne eine explizite Darstellung des implizit gegebenen Untervektorraumes

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^5.$$

b) Man berechne eine implizite Darstellung des explizit gegebenen Untervektorraumes

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^5.$$

Aufgabe T-2. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

b) Für $t = 4$ bzw. $t = 6$ *sind* v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit (warum?) auch ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$. Man bestimme in beiden Fällen die Darstellungen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 als Linearkombinationen der Vektoren v_1, v_2, v_3.

c) Für $t = 5$ bzw. $t = 6$ bestimme man jeweils eine implizite Darstellung des Untervektorraums $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sowie alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.

Aufgabe T-3. Welche der vier Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3, e_4 kann man zu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

hinzunehmen, um ein linear unabhängiges System v_1, v_2, v_3, v_4 zu erhalten?

(bitte wenden)

Aufgabe T-4. Es seien $U, W \subset \mathbb{R}^5$ die beiden Untervektorräume aus Aufgabe T-1. Man löse die folgenden Aufgaben und überlege jeweils genau, ob zu ihrer Lösung die explizite oder die implizite Darstellung des jeweiligen Untervektorraumes benutzt werden sollte:

a) Man untersuche, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U bzw. W enthalten ist.

b) Man gebe fünf verschiedene Vektoren an, die in U liegen, und fünf verschiedene Vektoren, die in W liegen.

c) Man berechne die Summe $U + W$.

d) Man berechne den Durchschnitt $U \cap W$.

e) Man zeige, daß $U \subset W$ gilt.

f) Man untersuche, ob $W = U$ ist.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 11.–15. Dezember 2014 behandelt.