Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Die Menge U ist nicht leer, denn es gilt $0 \in U$ wegen $0 = 0 - 0$. Sind $u, u' \in U$, also $u_3 = u_1 - u_2$ und $u'_3 = u'_1 - u'_2$, so gilt auch

$$\begin{aligned}(u + u')_3 = u_3 + u'_3 &= u_1 - u_2 + u'_1 - u'_2 \\ &= (u_1 + u'_1) - (u_2 + u'_2) = (u + u')_1 - (u + u')_2,\end{aligned}$$

also $u + u' \in U$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch

$$\begin{aligned}(\lambda u)_3 = \lambda \cdot u_3 &= \lambda \cdot (u_1 - u_2) \\ &= \lambda \cdot u_1 - \lambda \cdot u_2 = (\lambda u)_1 - (\lambda u)_2,\end{aligned}$$

also $\lambda u \in U$. Das zeigt, daß U ein Untervektorraum ist; der Nachweis für W läuft ganz analog.

b) Dies läßt sich am Einfachsten durch Ausprobieren lösen: Wir müssen jeden der Einheitsvektoren darstellen als Summe eines Vektors aus U und eines Vektors aus W. Dies ist beispielsweise auf die folgende Art und Weise möglich:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\in W},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in W},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in W},$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Möchte man nicht raten, sondern rechnen, so kann man beispielsweise – hier im Fall des Einheitsvektors e_1 dargestellt – das folgende lineare Gleichungssystem mit sechs Unbekannten $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ lösen:

$$\begin{aligned}u_1 + w_1 &= 1\\ u_2 + w_2 &= 0\\ u_3 + w_3 &= 0\\ u_3 &= u_1 - u_2\\ w_1 &= w_3\end{aligned}$$

c) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann in $U \cap W$, wenn $v_3 = v_1 - v_2$ *und* $v_1 = v_3$ ist. Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für v mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems (die nach Konstruktion genau $U \cap W$ ist) ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also tut $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

Aufgabe T-2. Um festzustellen, ob v eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist, fassen wir das Problem des Auffindens von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = v$$

als lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf. Dieses hat die erweiterte Koeffizientenmatrix (die man sich leicht merken kann, weil auf ihrer linken Seite einfach die Vektoren v_1, v_2, v_3 stehen, auf der rechten Seite der Vektor v)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dieses Gleichungssystem *ist* lösbar, also läßt sich v als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben. Eine solche Darstellung erhalten wir z.B., indem wir den (frei wählbaren) Parameter $\lambda_3 = 0$ wählen; dann ist $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 = -1$, also erhalten wir die Darstellung

$$v = -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = -v_1 + v_2,$$

von deren Richtigkeit man sich ohne weiteres direkt überzeugen kann.
Für den Vektor w wiederholen wir genau die gleiche Rechnung; da das zugehörige lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

sich jedoch als unlösbar erweist, ist w *keine* Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3.

Aufgabe T-3.

a) Hier gehen wir so vor wie in Aufgabe T-2, nur daß diesmal die Fragestellung eine andere ist: Wir schreiben einen allgemeinen Vektor $v = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ auf die rechte Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix und untersuchen, welche Eigenschaften dieser Vektor haben muß, damit das Gleichungssystem lösbar wird. Wir betrachten also die folgende, aus der Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \stackrel{!}{=} v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

gewonnene erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 3 & 7 & 7 & b_2 \\ -4 & -10 & -7 & b_3 \\ 2 & 5 & 3 & b_4 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & 5 & b_3 + 4b_1 \\ 0 & 1 & -3 & b_4 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - 2b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 + b_1 - b_2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - 2b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 + b_3 - b_1 + b_2 \end{array}\right).$$

Diese Koeffizientenmatrix ist in Zeilenstufenform; das zugehörige lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die Nullzeile auf der linken Seite auch einem verschwindenden Eintrag rechts gegenübersteht, wenn also $b_4 + b_3 - b_1 + b_2 = 0$ oder äquivalent $b_1 = b_2 + b_3 + b_4$ ist.

Die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^4$, die sich als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben läßt, ist also

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; b_1 = b_2 + b_3 + b_4 \right\}.$$

(Als kleine Rechenkontrolle kann man überprüfen, daß die Vektoren v_1, v_2, v_3 selbst ebenfalls diese Gleichung erfüllen – denn sie müssen natürlich in ihrem Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ liegen.

b) Der Vektor u läßt sich nicht als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben (er liegt nicht in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$), weil $u_1 \neq u_2 + u_3 + u_4$ ist, denn $1 \neq 2 + 3 + 4$.

Der Vektor w dagegen läßt sich als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben, denn es ist $1 = 0 + 1 + 0$. Um eine solche Darstellung zu ermitteln, setzen wir die Einträge von w in die bereits auf Zeilenstufenform gebrachte erweiterte Koeffizientenmatrix ein:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & w_1 \\ 0 & 1 & -2 & w_2 - 3w_1 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 - 2w_1 + 2w_2 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 + w_3 - w_1 + w_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt sich zu $\lambda_3 = -1$, $\lambda_2 = -3 + 2\lambda_3 = -5$ und $\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 14$, so daß wir

$$w = 14v_1 - 5v_2 - v_3$$

erhalten – daß das stimmt, ist leicht zu überprüfen; mit bloßem Raten hätte man es aber kaum herausgefunden.

Aufgabe T-4.

a) Um nachzuweisen, daß w_1 und w_2 in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ liegen, müssen wir zeigen, daß sich w_1 und w_2 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 schreiben lassen. Wie gehabt, läuft das darauf hinaus, die Lösbarkeit derjenigen linearen Gleichungssysteme festzustellen, die man symbolisch als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & w_1 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & w_2 \end{array}\right)$$

schreiben könnte. Um Arbeit zu sparen, schreibe ich einfach (etwas unorthodox) die Vektoren w_1 und w_2 *beide* rechts vom Trennstrich in eine gemeinsame Koeffizientenmatrix und interpretiere sie nach dem Umformen dann einzeln; ich betrachte also die Matrix

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|cc} v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & w_2 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Die Matrix auf der linken Seite hat Zeilenstufenform, so daß wir die Lösbarkeit daran ablesen können, ob auf der rechten Seite dort Nullen stehen, wo sie stehen müssen (nämlich auf der Höhe der Nullzeilen der linken Seite). Das ist der Fall, und zwar sowohl für die zu w_1 gehörende linke als auch für die zu w_2 gehörende rechte Spalte. Also gilt $w_1, w_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Ebenso zeigt man, daß $v_1, v_2, v_3 \in \langle w_1, w_2 \rangle$ gilt. Dafür formen wir die folgende (auch hier unorthodox vergrößerte) erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|ccc} w_1 & w_2 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Auch hier stehen in dem Moment, in dem links Zeilenstufenform erreicht ist, rechts die Nullen überall dort, wo sie benötigt werden (nämlich in der unteren Zeile); also sind alle drei linearen Gleichungssysteme lösbar, und das bedeutet $v_1, v_2, v_3 \in \langle w_1, w_2 \rangle$.

Die Behauptung $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ folgt dann wie in der Vorlesung: Nach der Charakterisierung von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ als dem „kleinsten“ Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der v_1, v_2, v_3 enthält, folgt aus $v_1, v_2, v_3 \in \langle w_1, w_2 \rangle$ automatisch $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \langle w_1, w_2 \rangle$; die andere Teilmengenbeziehung sieht man analog.

b) Wir beschreiben zunächst alle Elemente von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und gehen dazu vor wie in Aufgabe T-3 a): Ein Vektor $x = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ liegt genau dann in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, wenn das folgende lineare

Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \big| & x \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & -3 & 3 & b_3 - 2b_2 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + 7b_2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0$ ist, also gilt

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; -3b_1 + 7b_2 + b_3 = 0 \right\}.$$

Ebenso ermitteln wir eine Gleichung für $\langle w_1, w_2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \big| & x \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ -2 & 1 & b_3 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_2 \\ 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & b_3 + b_2 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 3 & b_3 + b_2 \end{array}\right) \\
&\curvearrowright \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + 7b_2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist ebenfalls genau dann lösbar, wenn $b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0$ ist, und das bedeutet

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; -3b_1 + 7b_2 + b_3 = 0 \right\} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle .$$