Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
7. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man lese die Definition eines Vektorraums und eines Untervektorraumes sowie die wichtigsten zugehörigen Rechenregeln (4.1–4.3, 4.7 und 4.8 in der Vorlesung) sorgfältig nach.

Aufgabe V-2. Man wiederhole das Kapitel über Aussagenlogik (1. Kapitel) aus der Vorlesung Grundlagen I.

Aufgabe V-3. Es seien P und Q Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Implikation „$P \implies Q$“, welche zu ihrer Negation „$\neg(P \implies Q)$“, welche zu keiner von beiden?

a) $\neg P \implies \neg Q$
b) $\neg Q \implies \neg P$
c) $P \implies \neg Q$
d) $\neg P \implies Q$
e) $\neg P \wedge \neg Q$
f) $P \wedge \neg Q$
g) $\neg P \vee Q$
h) $P \vee \neg Q$

Lösung: Zu „$P \implies Q$“ äquivalent sind b) (die sogenannte „Kontraposition“ der Aussage) und g).
Zu „$\neg(P \implies Q)$“ äquivalent ist nur f).

(bitte wenden)

Aufgabe V-4. Gustav möchte die Aussage beweisen: „Wenn $n \geq 5$ eine Primzahl ist, dann ist $n^2 - 1$ durch 6 teilbar.“

Welche der folgenden logischen „Gerüste“ können für einen solchen Beweis grundsätzlich zum Ziel führen?

a) „Es sei n eine Primzahl ≥ 5. Dann ......
...... und deswegen ist $n^2 - 1$ durch 6 teilbar.“

b) „Es sein $n \geq 5$ keine Primzahl. Dann ......
...... und deswegen ist $n^2 - 1$ nicht durch 6 teilbar.“

c) „Es sei $n \geq 5$ und $n^2 - 1$ nicht durch 6 teilbar. Dann ......
...... und deswegen ist n keine Primzahl.“

d) „Es sei $n \geq 5$ eine Primzahl und $n^2 - 1$ nicht durch 6 teilbar. Dann ......
...... und das ist ein Widerspruch.“

e) „Es sei $n \geq 5$ keine Primzahl, aber $n^2 - 1$ durch 6 teilbar. Dann ......
...... und das ist ein Widerspruch.“

f) „Es sei $n \geq 5$ keine Primzahl und $n^2 - 1$ nicht durch 6 teilbar. Dann ......
...... und das ist ein Widerspruch.“

Lösung: Zulässig sind die Beweisstrukturen a) (direkter Beweis), c) (Beweis durch Kontraposition) und d) (Beweis durch Widerspruch).

Zur Erinnerung: Um eine Aussage (z.B. die Aussage „7 ist eine Primzahl“) *durch Widerspruch* zu beweisen, folgert man aus ihrer Negation (hier „7 ist keine Primzahl“) einen Widerspruch. Für Aussagen der speziellen Form „$P \implies Q$“ (sogenannte *Implikationen*) gibt es neben dem Widerspruchsbeweis auch noch den Beweis „durch Kontraposition“:

- Beim Beweis einer Implikation „$P \implies Q$“ durch *Widerspruch* führt man die Negation „$\neg(P \implies Q)$“, meist in der äquivalenten Form $P \wedge \neg Q$, zum Widerspruch.
- Beim Beweis einer Implikation „$P \implies Q$“ durch *Kontraposition* beweist man die äquivalente Aussage „$\neg Q \implies \neg P$“.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1 (Staatsexamen Frühjahr 2004). Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; ferner bezeichne U die Menge aller Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot X = X \cdot A$.

a) Man drücke die Beziehung $A \cdot X = X \cdot A$ als lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, x_3, x_4 aus und bestimme dessen Lösungsraum $L \subset \mathbb{R}^4$.

b) Man zeige
$$U = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe T-2. Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ handelt:

a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\}$.

c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = 2x_3\}$.

d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3^2 = x_1 \cdot x_2\}$.

(Dabei bezeichnen, wie üblich, x_1, x_2, x_3 die Einträge von x, d.h. es ist jeweils $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.)

Aufgabe T-3. In dieser Aufgabe beweisen wir die fehlende Rechenregel für Vektorräume 4.3 d) aus der Vorlesung.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum sowie $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Man weise nach, daß $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = 0_V$ sowie $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = 0_V$ ist.

b) Man begründe sorgfältig, warum aus a) folgt, daß $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$ ist.

Aufgabe T-4. In dieser Aufgabe beweisen wir Satz 4.11 c) aus der Vorlesung.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und es seien $U, W \subset V$ Untervektorräume. Man zeige:

a) Man zeige: Ist $u \in U$ mit $u \notin W$, und ist $w \in W$ mit $w \notin U$, so liegt $u + w$ weder in U noch in W.

b) Man folgere mit einem Widerspruchsbeweis: Gilt weder $U \subset W$ noch $W \subset U$, so ist $U \cup W$ kein Untervektorraum von V.

c) Man beweise: $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von $V \iff$ Es gilt $U \subset W$ oder $W \subset U$.
Welche Beweistechnik kommt für die Richtung „$\Longrightarrow$", welche für die Richtung „$\Longleftarrow$" zum Einsatz?

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 27. November–1. Dezember 2014 behandelt.