Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Es ergibt sich (mich welchem Verfahren auch immer)

$$\det A = t^3 - 3t^2 + 2t = t \cdot (t^2 - 3t + 2) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2).$$

Daraus folgt die Äquivalenz $\det A = 0 \iff t \in \{0,1,2\}$, so daß die Matrix für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$ invertierbar ist.

(Wenn man die Faktorisierung $t^2 - 3t + 2 = (t-1) \cdot (t-2)$ nicht direkt „sieht", kann man stattdessen einfach die Gleichung $t^2 - 3t + 2 \overset{!}{=} 0$ lösen; ihre Lösungen sind $t = 1$ und $t = 2$.)

b) Für die komplementäre Matrix erhält man nach einigem Rechnen

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} t^2 - 4t + 4 & 0 & -2t + 4 \\ 1 & t^2 - t & t + 1 \\ t - 2 & 0 & t^2 - t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-2)^2 & 0 & -2 \cdot (t-2) \\ 1 & t \cdot (t-1) & t + 1 \\ t - 2 & 0 & (t+1) \cdot (t-2) \end{pmatrix}.$$

Für $t \notin \{0,1,2\}$ ergibt sich daraus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{t-2}{t\cdot(t-1)} & 0 & \frac{-2}{t\cdot(t-1)} \\ \frac{1}{t\cdot(t-1)\cdot(t-2)} & \frac{1}{t-2} & \frac{t+1}{t\cdot(t-1)\cdot(t-2)} \\ \frac{1}{t\cdot(t-1)} & 0 & \frac{t+1}{t\cdot(t-1)} \end{pmatrix}$$

Aufgabe T-2.

a) Am einfachsten ist es wohl, die Determinante zu berechnen (und zwar am besten mit der Kästchenregel für Blockmatrizen, 3.8 d) in der Vorlesung[1]): Man erhält $\det A = t^2 + 1$, und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $t^2 \geq 0$, also $t^2 + 1 \geq 1$ und damit $t^2 + 1 \neq 0$, so daß A für jedes t invertierbar ist.

b) Einige Rechnerei liefert

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & t^2 + 1 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t \cdot (t^2 + 1) & t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Strenggenommen muß die Matrix zuerst transponiert werden, um diese Regel anwenden zu können, weil der rechte obere Block leer ist und nicht, wie in der Vorlesung, der untere linke. Tatsächlich gilt die Regel aber auch unter dieser Voraussetzung, wie man – genau! – durch Transponieren einsehen kann.

c) • *Mit der inversen Matrix:* Indem wir $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$ verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
A \cdot x = b \quad \iff \quad x &= A^{-1} \cdot b = \frac{1}{t^2+1} \cdot \widetilde{A} \cdot b \\
&= \frac{1}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & t^2+1 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t \cdot (t^2+1) & t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} -t \cdot (1+t^2) \\ 1+t^2 \\ -t \cdot (1+t^2) \\ 1+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

• *Mit der Cramerschen Regel*: Hier benötigen wir die Determinanten der Matrizen B_1, B_2, B_3, B_4, wobei die Matrix B_j durch das „Überschreiben" der j-ten Spalte von A mit dem Spaltenvektor b gewonnen wird:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & t & 0 & 0 \\ \mathbf{1+t^2} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & t & 1 & 0 \\ \mathbf{1-t^2} & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ -t & \mathbf{1+t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1-t^2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & t & \mathbf{0} & 0 \\ -t & 1 & \mathbf{1+t^2} & 0 \\ 0 & t & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1-t^2} & 1 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & \mathbf{0} \\ -t & 1 & 0 & \mathbf{1+t^2} \\ 0 & t & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & t & \mathbf{1-t^2} \end{pmatrix}$$

Ausdauerndes Rechnen ergibt nun

$$\begin{aligned}
\det B_1 &= -t \cdot (t^2+1), \\
\det B_2 &= t^2+1, \\
\det B_3 &= -t \cdot (t^2+1), \\
\det B_4 &= t^2+1,
\end{aligned}$$

und die Cramersche Regel sagt nun, daß die einzige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ gegeben ist durch

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \det B_3 \\ \det B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uff – aber immerhin erhalten wir bei beiden Verfahren die gleiche Lösung.

Aufgabe T-3.

a) Folgt man den Schritten der Anleitung, erhält man

$$\begin{aligned}
d_n &= \det V_n \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) & \dots & (x_{n-1})^{n-2} \cdot (x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 - x_n & x_2 \cdot (x_2 - x_n) & \dots & (x_2)^{n-2} \cdot (x_2 - x_n) \\ 1 & x_1 - x_n & x_1 \cdot (x_1 - x_n) & \dots & (x_1)^{n-2} \cdot (x_1 - x_n) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_{n-1} - x_n & x_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) & \dots & (x_{n-1})^{n-2} \cdot (x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2 - x_n & x_2 \cdot (x_2 - x_n) & \dots & (x_2)^{n-2} \cdot (x_2 - x_n) \\ x_1 - x_n & x_1 \cdot (x_1 - x_n) & \dots & (x_1)^{n-2} \cdot (x_1 - x_n) \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_{n-1} & \dots & (x_{n-1})^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \dots & (x_2)^{n-2} \\ 1 & x_1 & \dots & (x_1)^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot \det V_{n-1} \\
&= (x_1 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot d_{n-1},
\end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Für $n = 1$ steht auf der rechten Seite das leere Produkt (es gibt keine Indizes i, j mit $1 \leq i < j \leq 1$), also der Wert 1. Auf der linken Seite steht dagegen $d_1 = \det V_1 = \det \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1$, es paßt also alles.

Für den Induktionsschritt $n - 1 \to n$ (für $n \geq 2$) verwenden wir a): Es ist

$$\begin{aligned}
d_n &= (x_1 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot d_{n-1} \\
&= (x_1 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_j) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),
\end{aligned}$$

wie behauptet.

c) Damit $f(x_1) = y_1$ usw. gilt, müssen folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}
r_{n-1} \cdot (x_1)^{n-1} + r_{n-2} \cdot (x_1)^{n-2} + \ldots + r_1 x_1 + r_0 &= y_1, \\
r_{n-1} \cdot (x_2)^{n-1} + r_{n-2} \cdot (x_2)^{n-2} + \ldots + r_1 x_2 + r_0 &= y_2, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
r_{n-1} \cdot (x_n)^{n-1} + r_{n-2} \cdot (x_n)^{n-2} + \ldots + r_1 x_n + r_0 &= y_n,
\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $r_0, \ldots, r_{n-1}$! Damit die Matrix dieses

Gleichungssystems aber die Matrix V_n wird, müssen wir noch ein wenig umsortieren[2] zum System

$$\begin{aligned} 1 \cdot r_0 + x_n \cdot r_1 + \ldots + (x_n)^{n-2} \cdot r_{n-2} + (x_n)^{n-1} \cdot r_{n-1} &= y_n, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ 1 \cdot r_0 + x_2 \cdot r_1 + \ldots + (x_2)^{n-2} \cdot r_{n-2} + (x_2)^{n-1} \cdot r_{n-1} &= y_2, \\ 1 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \ldots + (x_1)^{n-2} \cdot r_{n-2} + (x_1)^{n-1} \cdot r_{n-1} &= y_1, \end{aligned}$$

dessen erweiterte Koeffizientenmatrix nun lautet

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^{n-1} & y_n \\ 1 & x_{n-1} & (x_{n-1})^2 & \ldots & (x_{n-1})^{n-1} & y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1} & y_2 \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1} & y_1 \end{array}\right).$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist nun $\det V_n = d_n$. Es ist aber

$$d_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

da die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, also keiner der Faktoren $x_i - x_j$ für $i < j$ verschwindet. Also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Bemerkung: Die Aussage von Teil c) kann man handlich auch folgendermaßen formulieren:
Sind $P_1 = (x_1, y_1)$, …, $P_n = (x_n, y_n)$ Punkte in der Ebene, deren x-Koordinaten paarweise verschieden sind, so gibt es genau eine Polynomfunktion vom Grad $< n$, deren Graph durch die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ verläuft.
Das Stichwort zum Nachschlagen und Weiterlesen lautet „Polynominterpolation" – ein spannendes und etwa für die Physik bedeutsames Thema, das nicht weit vom Mathematik-Schulstoff entfernt ist!

Aufgabe T-4.

a) Aus $\widetilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$ folgt durch Bilden der Determinante auf beiden Seiten:

$$\det \widetilde{A} \cdot \det A = \det(\det(A) \cdot E_n) = (\det A)^n \cdot \det(E) = (\det A)^n.$$

Da nach Voraussetzung $\det A \neq 0$ ist, können wir auf beiden Seiten durch $\det(A)$ dividieren und erhalten

$$\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}.$$

b) Die Entsprechung von $\widetilde{A} = \det(A) \cdot A^{-1}$ für $\widetilde{\widetilde{A}}$ lautet

$$\widetilde{\widetilde{A}} = \det(\widetilde{A}) \cdot \widetilde{A}^{-1}.$$

Setzen wir hierin den Ausdruck für $\widetilde{A}$ sowie die Formel für $\det \widetilde{A}$ aus a) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{A}} &= (\det A)^{n-1} \cdot \left(\det(A) \cdot A^{-1}\right)^{-1} \\ &= (\det A)^{n-1} \cdot (\det A)^{-1} \cdot A \\ &= (\det A)^{n-2} \cdot A, \end{aligned}$$

wie behauptet.

[2] Das Problem entsteht dadurch, daß einerseits die Matix V_n so angegeben wurde, daß man sie schön induktiv umformen konnte, andererseits die Funktion $f(x)$ mit „hohen Potenzen voran" notiert wurde, wie es für Polynomfunktionen üblich ist, und die Numerierung der Gleichungen bei 1 begann und nicht bei n.

c) Die Aussagen von a) und b) bedeuten ...

- für 2×2-Matrizen, daß $\det \widetilde{A} = \det A$ sowie $\widetilde{\widetilde{A}} = A$ ist,
- für 3×3-Matrizen, daß $\det \widetilde{A} = (\det A)^2$ sowie $\widetilde{\widetilde{A}} = \det(A) \cdot A$ ist.

Damit erklärt sich, warum in Aufgabe V-3 Jochens Behauptung für 2×2-Matrizen tatsächlich stimmte; für 3×3-Matrizen stimmte sie nur für die Matrix B: Denn es ist $\det B = 1$ und damit $\widetilde{\widetilde{B}} = \det(B) \cdot B = B$. Entsprechend erklärt sich, was für C und D passiert ist; insbesondere ist $\det D = 0$, also $\widetilde{\widetilde{D}} = 0$.