Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
6. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man lese die Definition und Eigenschaften der Komplementärmatrix sowie den Satz über die Cramersche Regel (3.15, 3.18, 3.20 und 3.21 in der Vorlesung) sorgfältig nach.
Für welche Matrizen existiert eine Komplementärmatrix?

Aufgabe V-2. Man berechne die Komplementärmatrix $\widetilde{A}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe V-3. Jochen behauptet:

> „Mit der Komplementärmatrix ist es wie mit der Inversen: Bilde ich sie zweimal, bekomme ich die ursprüngliche Matrix zurück, in Formeln: $\widetilde{\widetilde{A}} = A$.“

Man überprüfe Jochens Aussage

a) anhand einer allgemeinen 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

b) anhand der folgenden 3×3-Matrizen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe V-4. Man löse die beiden folgenden Aufgaben mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems:

a) Wie müssen die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt sein, damit für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

gilt $f(2) = -2$ und $f(4) = 2$?

b) Wie müssen die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ gewählt sein, damit für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

gilt $f(-1) = 2$, $f(1) = -4$ und $f(2) = -1$?

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Für den reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

a) Man berechne $\det(A)$ und bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die A invertierbar ist.

b) Man berechne die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ und bestimme, sofern möglich, die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe T-2. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

a) Man zeige, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

b) Man bestimme die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

c) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe T-3 (Die Vandermondesche Matrix). Für jedes $n \geq 1$ sei d_n die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \\ 1 & x_{n-1} & (x_{n-1})^2 & \dots & (x_{n-1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Man beweise, daß für jedes $n \geq 2$ gilt

$$d_n = (x_1 - x_n) \cdot (x_2 - x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot d_{n-1}.$$

(Anleitung:

- *Zunächst Spaltenumformungen: Ziehe das x_n-Fache der vorletzten Spalte von der letzten Spalte ab, danach das x_n-Fache der drittletzten Spalte von der vorletzten Spalte, usw.*
- *Anschließend bietet sich eine Zeile zum Entwickeln der Determinante an.*
- *Zuletzt kann man aus jeder Zeile Faktoren herausziehen.)*

b) Man folgere aus a) mittels vollständiger Induktion: Für jedes $n \geq 1$ ist

$$d_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

c) Man beweise: Ist $n \geq 1$, sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschieden und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen, so gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $r_0, \dots, r_{n-1}$, so daß für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots + r_1 x + r_0$$

gilt $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$.

(Man stelle, ähnlich wie in Aufgabe V-4, ein lineares Gleichungssystem auf, in dem die Matrix V_n eine Rolle spielt.)

Aufgabe T-4. Es sei $n \neq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Man beweise:

a) Ist A invertierbar, so ist $\det(\widetilde{A}) = (\det A)^{n-1}$.

   (Hinweis: Man verwende die Beziehung $\widetilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.)

b) Ist A invertierbar, so ist $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-2} \cdot A$.

   (Hinweis: Man verwende die Beziehung $\widetilde{A} = \det(A) \cdot A^{-1}$ und die entsprechende Aussage für $\widetilde{\widetilde{A}}$.)

c) Die Aussagen aus a) und b) stimmen auch, wenn A *nicht* invertierbar ist.
   (Für a) siehe das 6. Zentralübungsblatt; für b) ist der Beweis für uns leider vorläufig zu schwierig.)

   Man denke vor diesem Hintergrund noch einmal über die Beobachtungen aus Aufgabe V-3 nach.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 20.–24. November 2014 behandelt.