Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Um halbwegs vorteilhaft zu rechnen, kann man beispielsweise zuerst ausnutzen, daß sich die Determinante bei elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen vom Typ III nicht ändert; damit können wir noch einige Nullen erzeugen:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} && \left(\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \text{ und } \overset{\mathrm{III}+2\,\mathrm{V}}{\curvearrowright} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} && (\text{Entwickeln nach 2. Spalte}) \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} && \left(\overset{\mathrm{III}+4\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \right) \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} && (\text{Entwickeln nach 1. Spalte}) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} && (\text{Sarrus}) \\
&= 4 + (-16) - (-4) \\
&= -8
\end{aligned}
$$

b) Nein, eine solche Matrix gibt es nicht: Denn dann wäre $-8 = \det(A) = \det(B^{2014}) = \det(B)^{2014}$ aufgrund der Multiplikativität der Determinante (eine Potenz ist ja nur ein langes Produkt aus lauter gleichen Faktoren). Aber -8 ist keine 2014te Potenz in $\mathbb{R}$, denn da 2014 gerade ist, ist $x^{2014} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T-2. Wie in Aufgabe T-1 erweist sich auch hier eine Kombinatinon aus Zeilenumformungen und Entwickeln als nützlich:

$$
\begin{aligned}
\det A_t &= \det \begin{pmatrix} t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ t & t & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \left(\overset{\mathrm{III}-t\cdot\mathrm{IV}}{\curvearrowright} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{(Entwickeln nach der dritten Zeile...)} \\
&= -(1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \left(\overset{\mathrm{I}-t\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \text{ und danach } \overset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \right) \\
&= (t-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{(zwei Zeilenvertauschungen ...)} \\
&= (t-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} && \text{(obere Dreiecksmatrix ...)} \\
&= (t-1) \cdot 1 \cdot (1-t) \cdot (t-1) \\
&= (1-t)^3.
\end{aligned}
$$

Der große Vorteil dieses Rechenweges sit, daß er die Determinante gleich in faktorisierter Form liefert – dies liegt an der Zurückführung auf die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix, die ja ein Produkt ist (und nicht, wie Determinanten sonst üblicherweise, eine große Summe). Beispielsweise für die Untersuchung der Frage, ob die Determinante $= 0$ ist, ist das sehr nützlich – denn wann ein Produkt verschwindet, weiß man; für eine Summe ist das nicht so klar.

Nun ist A_t genau dann nicht invertierbar, wenn $0 = \det A_t = (1-t)^3$ ist, was äquivalent ist zu $0 = 1-t$, also zu $t = 1$. Damit ist A_t für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ invertierbar, und dann gilt

$$\det(A_t^{-1}) = \det(A_t)^{-1} = \frac{1}{(1-t)^3}.$$

*

Bei der Matrix B_t entscheide ich mich anstelle der „gewöhnlichen“ Rechnung (etwa durch Entwickeln nach irgendeiner Zeile) für einen kleinen Trick, um den gleichen Vorteil wie bei der Matrix A_t herauszuholen: Ich konzentriere mich auf den Fall $t \neq 0$ (muß dann eben am Ende den Fall $t = 0$ noch einer gesonderten Betrachtung unterziehen). Dann multipliziere ich die zweite Zeile von B_t mit t, die dritte mit t^2 und die vierte mit t^3:

$$
\begin{aligned}
\det B_t &= \frac{1}{t \cdot t^2 \cdot t^3} \cdot \det \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t^3 & t^2 & t & t^4 \\ t^3 & t^2 & t^5 & t^4 \\ t^3 & t^6 & t^5 & t^4 \end{pmatrix} && \text{(erste Zeile von allen anderen abziehen...)} \\
&= \frac{1}{t^6} \cdot \det \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t^4-1 \\ 0 & 0 & t^5-t & t^4-1 \\ 0 & t^6-t^2 & t^5-t & t^4-1 \end{pmatrix} && \left(\overset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\curvearrowright} \right) \\
&= \frac{1}{t^6} \cdot \det \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ 0 & t^6-t^2 & t^5-t & t^4-1 \\ 0 & 0 & t^5-t & t^4-1 \\ 0 & 0 & 0 & t^4-1 \end{pmatrix} && \text{(obere Dreiecksmatrix)} \\
&= \frac{-1}{t^6} \cdot t^3 \cdot (t^6-t^2) \cdot (t^5-t) \cdot (t^4-1) \\
&= \frac{-1}{t^6} \cdot t^3 \cdot t^2 \cdot t \cdot (t^4-1)^3 \\
&= -(t^4-1)^3 = (1-t^4)^3.
\end{aligned}
$$

Dieser Rechenweg fällt hier vielleicht ein wenig vom Himmel – ich habe ihn wirklich nur durch „Anstarren der Matrix“ und „einfach Ausprobieren“ gefunden!

Diese Rechnung galt nur für $t \neq 0$. Für $t = 0$ dagegen kann man schnell nachrechnen, daß $\det B_0 = 1$ ist, und sieht daran, daß die Formel $\det B = (1-t^4)^3$ auch in diesem Fall stimmt; sie gilt also für alle $t \in \mathbb{R}$.
Der Rest geht genauso wie bei A_t: Die Matrix B_t ist genau dann nicht invertierbar, wenn $\det B_t = (1-t^4)^3 = 0$ ist, was äquivalent ist zu $1 - t^4 = 0$ und damit zu $t^4 = 1$. Dies wiederum ist gleichwertig zu $t^2 = \pm 1$ und damit (da -1 kein Quadrat einer reellen Zahl ist) zu $t^2 = 1$, was schließlich äquivalent ist zu $t = \pm 1$.
Insgesamt ist B_t invertierbar für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, und dann gilt

$$\det(B_t^{-1}) = \det(B_t)^{-1} = \frac{1}{(1-t^4)^3}.$$

Aufgabe T-3.

a) Das ist eine direkte Rechnung: Es ist

$$
\begin{aligned}
&D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 \\
&= (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Warum dieses Restultat herauskommt, kann man mit etwas mehr Matrixtheorie begründen – das Stichwort ist hier der „Satz von Cayley-Hamilton“, der vielleicht später einmal in der Vorlesung behandelt werden wird.

b) Aufgabe a) besagt, daß

$$A^2 = S \cdot A - D \cdot E_2 = S \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

ist; wir müssen also untersuchen, wann dieser Ausdruck die Einheitsmatrix ergibt.

„Immer dann“. Ist $S = 0$ und $D = -1$, so ergibt der Ausdruck auf der rechten Seite von (2) offensichtlich E_2. Ist dagegen $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$, so ergibt er

$$(a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ebenfalls die Einheitsmatrix.

„Nur dann“. Ergibt die rechte Seite von (2) die Einheitsmatrix, so gilt $Sb = Sc = 0$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Ist $S = 0$, so ergibt sich

$$E_2 = -\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

also $D = -1$, und damit ist die erste Hälfte der angegebenen „oder“-Aussage erfüllt. Ist dagegen $S \neq 0$, so folgt $b = c = 0$, und es ist $1 = Sa - D = (a+d)a - ad = a^2$ und $1 = Sd - D = (a+d)d - ad = d^2$, so daß die zweite Hälfte „oder“-Aussage wahr ist.

Aufgabe T-4.

a) Diese Aussage kann man (wie es für rekursiv definierte Folgen häufig der Fall ist) per Induktion nach i beweisen: Für $i = 0$ ist $A^{(2^0)} = A^1 = A = P_0$, die Aussage stimmt also. Ist sie nun für ein $i \geq 0$ bereits bewiesen, so gilt $P_{i+1} = (P_i)^2 = (A^{(2^i)})^2 = A^{(2^i \cdot 2)} = A^{(2^{i+1})}$, wie behauptet.

b) Die Aussage, daß $(a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0)_2$ die Darstellung von k als Dualzahl ist, bedeutet genau, daß

$$k = a_s \cdot 2^s \ + \ a_{s-1} \cdot 2^{s-1} \ + \ \dots \ + \ a_1 \cdot 2^1 \ + \ a_0 \cdot 2^0$$

ist. Nach den üblichen Potenzrechenregeln (aus einer Summe im Exponenten wird ein Produkt der Potenzen) folgt daraus

$$\begin{aligned} A^k &= A^{(a_s \cdot 2^s \ + \ a_{s-1} \cdot 2^{s-1} \ + \ \dots \ + \ a_1 \cdot 2^1 \ + \ a_0 \cdot 2^0)} \\ &= A^{(a_s \cdot 2^s)} \cdot A^{(a_{s-1} \cdot 2^{s-1})} \cdot \ldots \cdot A^{(a_1 \cdot 2^1)} \cdot A^{(a_0 \cdot 2^0)} \\ &= \left(A^{(2^s)}\right)^{a_s} \cdot \left(A^{(2^{s-1})}\right)^{a_{s-1}} \cdot \left(A^{(2^1)}\right)^{a_1} \cdot \left(A^{(2^0)}\right)^{a_0} \\ &= (P_s)^{a_s} \cdot (P_{s-1})^{a_{s-1}} \cdot \ldots \cdot (P_1)^{a_1} \cdot (P_0)^{a_0}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

c) Es ist $k = 23 = (10111)_2$, also ist nach b)

$$\begin{aligned} A^{23} &= (P_4)^1 \cdot (P_3)^0 \cdot (P_2)^1 \cdot (P_1)^1 \cdot (P_0)^0 \\ &= P_4 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0. \end{aligned}$$

Nun haben wir schon in Aufgabe V-3 die Potenzen $A^2 = P_1$, $A^4 = P_2$, $A^8 = P_3$ und $A^{16} = P_4$ berechnet, und zwar ergab sich

$$\begin{aligned}
P_0 = A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
P_1 = A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
P_2 = A^4 = (A^2)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_3 = A^8 = (A^4)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \\
P_4 = A^{16} = (A^8)^2 &= \begin{pmatrix} -17 & -3 & -33 \\ 9 & 4 & 21 \\ 12 & -9 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
A^{23} &= P_4 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \\
&= \begin{pmatrix} -17 & -3 & -33 \\ 9 & 4 & 21 \\ 12 & -9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -45 & -35 & -127 \\ 19 & 28 & 73 \\ 54 & -19 & 63 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt eine etwas lästige Rechnerei, aber viel besser als das direkte Ausrechnen von A^{23} durch 22 Matrixmultiplikationen: Wir haben nur vier Multiplikationen zum Berechnen von $P_0, \dots, P_4$ benötigt und drei weitere zum Berechnen des Produkts $P_4 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0$, also sind wir mit sieben Matrixmultiplikationen davongekommen!

d) Die Zahl $k = 2000 = (11111010000)_2$ hat im Binärsystem 11 Ziffern $a_{10}, a_9, \dots, a_0$, also benötigen wir die Folgenglieder $P_{10}, \dots, P_0$ (wobei diesmal $P_0 = B$ zu wählen ist). Diese erhalten wir mit zehn Matrixmultiplikationen. Zum Berechnen von

$$B^{2000} = P_{10} \cdot P_9 \cdot P_8 \cdot P_7 \cdot P_6 \cdot P_4$$

schließlich benötigen wir fünf weitere Matrixmultiplikationen, so daß insgesamt A^{2000} mit nur 15 Matrixmultiplikationen berechnet werden kann. (Daß B das Format 6×6 hat, spielt in unserem Argument keine Rolle.)