Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Wintersemester 2014/15 | Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
4. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Gegeben seien die drei Elementarmatrizen

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man beschreibe in Worten, mit welchen Zeilenumformungen man F_1 aus der Einheitsmatrix E_4 gewinnen kann.

b) Man berechne das Produkt

$$F_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

c) Man beschreibe in Worten, was mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times ?}$ passiert, wenn man $F_1 \cdot A$ berechnet (ein Blick auf b) ist hilfreich).

d) Man wiederhole a) bis c) für die Matrizen F_2 und F_3. Was kann man beobachten?

e) Man versuche, die in d) gemachte Beobachtung als Regel zu formulieren, und setze sie in Beziehung zur Formel $F \cdot E = F$ (wobei F eine Elementarmatrix und E die Einheitsmatrix ist).

Aufgabe V-2. Man lese die Rechenregeln für Determinanten (3.2, 3.3 und 3.5 in der Vorlesung) sowie den Satz über Entwicklung nach einer Spalte oder Zeile (3.6 in der Vorlesung) samt den anschließenden Beispielen sorgfältig nach.

Aufgabe V-3. Man berechne die Determinante der allgemeinen 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- durch Entwicklung nach der 1. Spalte,
- durch Entwicklung nach der 2. Spalte,
- durch Entwicklung nach der 1. Zeile,
- durch Entwicklung nach der 2. Zeile,
- sowie durch elementare Zeilenumformungen (hier ist möglicherweise eine Fallunterscheidung der Art $a = 0$ bzw. $a \neq 0$ nötig).

Aufgabe V-4. Man zeige durch durch ein Beispiel im Format 2×2 sowie durch ein weiteres Beispiel im Format 3×3, daß die „Rechenregel“ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ nicht zutrifft.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Man bringe jede der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 8 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Äquivalenznormalform.

Aufgabe T-2. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$ auf jeweils zwei verschiedene Arten.

b) Man bestimme $\det(2A)$, $\det(A^2)$ und $\det(BC)$ auf jeweils zwei verschiedene Arten.

Man achte dabei darauf, jede der Techniken

- Regel von Sarrus
- elementare Zeilen- und Spaltenumformungen
- Entwicklung nach einer Spalte (oder Zeile)
- Multiplikationssatz (Satz 3.3 a))

mindestens einmal zu verwenden.

Aufgabe T-3. Für den Parameter $a \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & a & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & a \\ a & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & a & -a \\ -a & \sqrt{3} & a \\ a & -a & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, daß A genau dann invertierbar ist, wenn $a \neq 0$ gilt.

b) Man zeige, daß S stets invertierbar ist.

c) Man berechne $\det(S^{-1}AS)$.

Aufgabe T-4.

a) Man ergänze den folgenden Satz: Ein mögliches Analogon der Regel von Sarrus für 4×4-Matrizen hätte die Gestalt

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & p & q \end{pmatrix} = \dots$$

b) Man zeige durch ein Beispiel, daß die „Regel“ aus a) <u>nicht</u> zutrifft.

c) Man begründe durch Vergleich mit Satz 3.7 aus der Vorlesung, warum nicht zu erwarten ist, daß eine „Regel“ wie in a) für Matrizen vom Format 4×4 zutreffen könnte.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 6.–10. November 2014 behandelt.