Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 2. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1. Ein Produkt $P \cdot Q$ zweier Matrizen läßt sich dann bilden, wenn die Spaltenzahl von P identisch mit der Zeilenzahl von Q ist (und das Produkt erbt dann die Zeilenzahl von P und die Spaltenzahl von Q). Damit ergeben sich die sechs möglichen Produkte:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 & 17 \\ 7 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \\
A \cdot C &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -6 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \\
B \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \\
C \cdot B &= \begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 & 5 \\ -11 & -1 & 4 & -12 \\ 14 & -3 & -5 & 13 \end{pmatrix}, \\
C^2 = C \cdot C &= \begin{pmatrix} 14 & -5 & -7 \\ -5 & 14 & 1 \\ -7 & 1 & 14 \end{pmatrix}, \\
D \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe T-2.

- Geduldiges Rechnen liefert

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix},
$$

  d.h. es ist $A^2 = A$. (So etwas passiert mit Zahlen nicht – mit Matrizen kann es jedoch vorkommen!) Dann ist aber zu erwarten, daß $A^r = A$ für *alle* $r \geq 1$ gilt. Dies kann man mit Induktion nach r beweisen: Der Fall $r = 1$ ist klar, und den Fall $r = 2$ haben wir berechnet. Für den Induktionsschritt $r \to r + 1$ (für $r \geq 2$) genügt nun die Beobachtung

$$
A^{r+1} = A^r \cdot A \overset{\text{Ind.voraussetzung}}{=} A \cdot A \overset{\text{Rechnung oben}}{=} A.
$$

- Ebenso fleißiges Rechnen ergibt

$$
B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Hier ist noch nichts Interessantes zu erkennen, also rechnen wir frohgemut weiter:

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man nun etwas anfangen, denn es ist zu erwarten, daß dann $B^r = 0$ für alle $r \geq 3$ ist. Das ist so gut wie klar; wer ganz genau ist, beweist es per Induktion: Der Induktionsanfang $r = 3$ steht schon da; für den Schritt $r \to r+1$ ($r \geq 3$) rechnet man

$$B^{r+1} = B^r \cdot B \overset{\text{Ind.voraussetzung}}{=} 0 \cdot B = 0.$$

- Routiniertes Rechnen ergibt

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und, weil man bislang noch nichts Interessantes erkennen konnte,

$$C^3 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet aber $C^3 = -E_3$, und damit können wir die nächsten Potenzen leicht berechnen:

$$C^4 = C^3 \cdot C = -E_3 \cdot C = -C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C^5 = C^4 \cdot C = -C \cdot C = -C^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C^6 = C^5 \cdot C = -C^2 \cdot C = -C^3 = -(-E_3) = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist aber $C^7 = C^6 \cdot C = E_3 \cdot C = C$ usw. und allgemein $C^{r+6} = C^r \cdot C^6 = C^r \cdot E_3 = C^r$ für alle $r \geq 1$. Man erhält also, indem man r als $6k+i$ mit $i \in \{0, \ldots, 5\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ schreibt,

$$\begin{aligned} C^{6k} &= E_3, \\ C^{6k+1} &= C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \\ C^{6k+2} &= C^2 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ C^{6k+3} &= C^3 = -E_3, \\ C^{6k+4} &= C^4 = -C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^{6k+5} &= C^5 = -C^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe T-3.

a) Man erhält

$$L_4 \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad U_4 \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der Matrix Q sind also durch die Linksmultiplikation mit L_4 (mit U_4) um eine Zeile nach unten (nach oben) „gerutscht", und die entstehenden Lücken wurden mit Nullen aufgefüllt.

b) Es ist zu vermuten, daß ganz allgemein Linksmultiplikation mit L_n (mit U_n) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Einträge von A um eine Zeile nach unten (nach oben) „rutschen" läßt.

c) Man erhält (die fett gedruckten Einträge verdeutlichen, wie beispielsweise der linke obere Eintrag des Produktes zustandekommt)

$$L_n \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & \dots & a_{(n-1)m} \end{pmatrix}$$

sowie

$$U_n \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

wodurch die Vermutung aus b) bewiesen ist.

d) Der Kern ist die Beobachtung, daß $L_n^\top = U_n$ und $U_n^\top = L_n$ ist, zusammen mit der Tatsache, daß das Transponieren von Matrizen die Reihenfolge von Produkten umkehrt.[1] Damit können wir rechnen:

$$B \cdot L_n = B \cdot U_n^\top = (B^\top)^\top \cdot U_n^\top = \left(U_n \cdot B^\top\right)^\top .$$

Die Beziehung $B \cdot L_n = \left(U_n \cdot B^\top\right)^\top$ erlaubt nun die folgende Deutung der Rechtsmultiplikation mit L_n: Die Matrix wird zunächst transponiert, dann werden ihre Einträge mittels U_n um eine Zeile nach oben geschoben, und schließlich wird zurücktransponiert. Insgesamt werden dabei die Einträge von B um eine Spalte nach links verschoben (denn Spiegelung an der Hauptdiagonalen übersetzt „oben" in „links").

Ebenso kann man rechnen

$$B \cdot U_n = B \cdot L_n^\top = (B^\top)^\top \cdot L_n^\top = \left(L_n \cdot B^\top\right)^\top ,$$

und ein ähnliches Argument wie eben zeigt, daß Rechtsmultiplikation mit U_n eine Verschiebung der Einträge von B um eine Spalte nach *rechts* bewirkt (denn es wird zunächst transponiert, dann nach unten verschoben und schließlich zurücktransponiert, und Spiegelung an der Hauptdiagonalen übersetzt „unten" in „rechts").

Insgesamt liefert diese Aufgabe ein weiteres Beispiel für die folgende, anhand der Zeilenumformungen in der Vorlesung erwähnte Tatsache: Multipliziert man an eine Matrix ...

- ... etwas von *links*, so manipuliert man die *Zeilen* der Matrix.
- ... etwas von *rechts*, so manipuliert man die *Spalten* der Matrix.

Aufgabe T-4. Es ist

$$0 \overset{!}{=} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d) \cdot b \\ (a+d) \cdot c & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Angenommen, diese letzte Gleichung ist erfüllt; dann gilt also $a^2 + bc = (a+d) \cdot b = (a+d) \cdot c = d^2 + bc = 0$.

Behauptung. Dann ist $a + d = 0$, also $d = -a$.
Beweis der Behauptung. Wäre $a + d \neq 0$, so müßte wegen $(a+d) \cdot b = (a+d) \cdot c = 0$ notwendig $b = c = 0$ gelten. Dann folgt aber $0 = a^2 + bc = a^2$ und $0 = d^2 + bc = d^2$, also $a = d = 0$, also doch $a + d = 0$, Widerspruch.

Es ist also $0 = a^2 + bc = 0$ und $0 = d^2 + bc = (-a)^2 + bc = a^2 + bc$, so daß beide Gleichungen das gleiche besagen, nämlich $a^2 = -bc$. (Dies ist, auch wenn man das denken könnte, *kein* Widerspruch zur Tatsache, daß Quadrate niemals negativ sind: Denn $-bc$ kann durchaus eine positive Zahl sein, solange nämlich b und c verschiedenes Vorzeichen haben.)
Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Ist $b = 0$, so ist $a^2 = -bc = 0$, also $a = 0$, und die Matrix hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit irgendeinem } c \in \mathbb{R}.$$

[1] Die Notwendigkeit dieser Verdrehung kann man sich schon daran verdeutlichen, daß – wenn ein Produkt $A \cdot B$ definiert ist – die Formate der beteiligten Matrizen im allgemeinen gar nicht erlauben, das Produkt $A^\top \cdot B^\top$ zu berechnen, während beim Produkt $B^\top \cdot A^\top$ die Faktoren zusammenpassen.

Ist dagegen $b \neq 0$, so folgt aus $a^2 = -bc$ die Beziehung $c = -a^2/b$, so daß die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit irgendwelchen } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } b \neq 0$$

hat. Umgekehrt kann man schnell nachrechnen, daß beide angegebenen Formen tatsächlich die Beziehung $A^2 = 0$ erfüllen.