Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Wintersemester 2014/15 | Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 1. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1. Das erste Gleichungssystem läßt sich durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix darstellen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Wir gehen nun nach dem Gaußschen Algorithmus vor, um „von links nach rechts und von oben nach unten“ die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{II}-5\cdot\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{III}-7\cdot\text{I}}{\curvearrowright}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}\cdot\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{\text{III}+4\cdot\text{II}}{\curvearrowright}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die zuletzt erhaltene Matrix hat Zeilenstufenform.[1]
Für die Lösung des Gleichungssystems ergibt sich damit: Es muß $x_3 = 0$ sein (letzte Zeile der Matrix), $3x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = \frac{1}{3}$ (zweite Zeile der Matrix), und $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, also $x_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das zweite Gleichungssystem liefert die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Wir werfen wieder Gauß an, wobei ich die Zahl der hingeschriebenen Zwischenschritte nun etwas redu-

[1] Das Ausdividieren gemeinsamer Faktoren innerhalb einer Zeile, wie wir es im dritten Schritt (Division der IIten Zeile durch -3) gemacht haben, ist generell empfehlenswert, um fehlerträchtiges Bruchrechnen zu vermeiden!

ziere:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -8 & -5 \end{array}\right) \curvearrowright$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 19 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die zuletzt erhaltene Matrix besitzt Zeilenstufenform. An ihr erkennt man, daß das System *keine* Lösung besitzt: Denn die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix liefert die Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, die nicht lösbar ist. (Generell besitzt ein Gleichungssystem keine Lösung, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & * \end{array}\right)$ mit $* \neq 0$ enthält.) Es ist also

$$L = \emptyset.$$

Aufgabe T-2. In beiden Fällen hilft der Gaußsche Algorithmus: Für die erste erweiterte Koeffizientenmatrix ergibt er

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 24 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & -2 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte erweiterte Koeffizientematrix ist in Zeilenstufenform. Wir könnten also das Umformen einstellen; noch einfacher wird die Rechnung jedoch, wenn wir zuletzt noch die zweite Zeile von der ersten abziehen, um zur Matrix

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zu gelangen. Die letzte Zeile liefert keinen Beitrag (sie entspricht der Gleichung $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 = 0$, die stets erfüllt ist). Die vorletzte Zeile besagt, daß die Variablen x_3 und x_4, die keinen Stufenspalten entsprechen, frei gewählt werden können, also $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$, und dann ist $x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -6$, also $x_2 = 2\lambda + 2\mu - 6$. Die erste Zeile schließlich besagt $x_1 + x_4 = 4$, also $x_1 = 4 - x_4 = 4 - \mu$. Es ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-\mu \\ 2\lambda + 2\mu - 6 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die zweite erweiterte Koeffizientenmatrix liefert Gauß

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -8 \end{array}\right) \curvearrowright$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Die letzte erhaltene Matrix hat Zeilenstufenform, und wir können die Lösung nun von unten nach oben ablesen: Es muß $5x_4 = 4$ sein, also $x_4 = \frac{4}{5}$; weiter muß $-x_3 - 3x_4 = -3$, also $x_3 = 3 - 3x_4 = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$ sein. Im nächsten Schritt erhalten wir $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - x_3 = \frac{2}{5}$, und schließlich $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, also $x_1 = 2 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 - \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. Insgesamt erhalten wir also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe T-3. Solche Aufgaben löst man, indem man sich vom Auftreten des Parameters nicht weiter stören läßt und ihn durch das ganze Gauß-Verfahren hindurch mitschleppt; am Ende kann man dann sehen, inwieweit die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix vom Parameter abhängt. Beginnen wir also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2{,}5 & 6 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \curvearrowright$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 12 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & t \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{array}\right)$$

Hier kann man nun ablesen: Ist $t - 7 \neq 0$, also $t \neq 7$, so besitzt das System keine Lösung (dies liefert die letzte Zeile). Andernfalls, wenn also $t = 7$ ist, erhalten wir der von unten nach oben der Reihe nach $x_3 = 1$, $x_2 = x_3 = 1$ und $2x_1 + x_2 = 1$, also $2x_1 = 0$ und damit $x_1 = 0$.
Die Lösungsmenge L_t in Abhängigkeit vom Parameter t lautet also

$$L_t = \emptyset \quad \text{für } t \neq 7, \qquad L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe T-4. Schreiben wir die gesuchte Zahl als $x =$ „abc“ mit den Ziffern a, b, c, so gilt $x = 100a + 10b + c$, und die die drei gegebenen Bedingungen lauten der Reihe nach:

$$\begin{aligned} a + b + c &\stackrel{!}{=} 18, \\ 100b + 10a + c &\stackrel{!}{=} x + 180 = 100a + 10b + c + 180, \\ 100a + 10c + b &\stackrel{!}{=} x + 18 = 100a + 10b + c + 18. \end{aligned}$$

Bringt man die in den unteren beiden Gleichungen noch rechts stehenden Variablen a, b, c auf die linke Seite, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in der üblichen Form:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 18, \\ -90\,a & + & 90\,b & & & = & 180, \\ & & -9\,b & + & 9\,c & = & 18. \end{array}$$

Auf die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix wenden wir den Gaußschen Algorithmus an:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ -90 & 90 & 0 & 180 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \curvearrowright$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 20 \end{array}\right) \curvearrowright$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{array}\right).$$

Die letzte Matrix hat Zeilenstufenform, und wir können von unten nach oben ablesen: $3c = 24$, also $c = 8$. Weiter ist $-b+c = 2$, also $b = c-2 = 6$ und schließlich $a+b+c = 18$, also $a = 18-b-c = 4$. Wir haben also tatsächlich Ziffern (also Elemente von $\{0, 1, \ldots, 9\}$ als Lösungen erhalten, und es ist $x =$ „abc“ $= 468$.