Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 13. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1. Für die Frage, ob eine quadratische Matrix den *vollen* Rang hat (also bei den hier betrachteten Matrizen den Rang 3), haben wir ein handliches Kriterium, nämlich die Berechnung ihrer Determinante – denn für quadratische Matrizen bedeutet „voller Rang" ja das gleiche wie „invertierbar". Dies können wir zuerst überprüfen: Ein wenig Rechnerei ergibt, daß $\det A = t^3 \cdot (t^3 - 1)^2$ ist. Damit ist A genau dann invertierbar (und hat also den Rang 3), wenn weder $t = 0$ noch $t = 1$ ist; also bleiben nur noch diese beiden Fälle zu überprüfen. Ist $t = 0$, so ist $A = 0$, so daß $\mathrm{Rang}(A) = 0$ ist. Ist $t = 1$, so ist A die Matrix, die nur aus Einsen besteht, die offensichtlich Rang 1 hat. Wir können also zusammenfassen:

$$\mathrm{Rang}(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t = 1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Matrix B ergibt sich $\det(B) = -2t^2 \cdot (t+1)$. Damit ist B genau dann invertierbar (und hat also den Rang 3), wenn weder $t = 0$ noch $t = -1$ ist. Nur noch diese beiden Fälle bleiben zu untersuchen: Ist $t = 0$, so hat B die Form „überall Nullen bis auf eine einzige 1", so daß offensichtlich $\mathrm{Rang}(B) = 1$ ist. Ist $t = -1$, so ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

so daß in diesem Fall $\mathrm{Rang}(B) = 2$ ist. Damit ergibt sich

$$\mathrm{Rang}(B) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0, \\ 2 & \text{für } t = -1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe T-2.

a) Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}\,(A \,|\, b) = \mathrm{Rang}(A)$ ist – wie wir gleich sehen werden, ist dies nichts weiter als eine beeindruckend klingende Umformulierung eines Kriteriums, das wir schon lange verwenden.

   Formen wir nämlich die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform um, um den Rang berechnen zu können, so ergibt sich:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 & 3+\beta \end{array}\right) \quad \curvearrowright \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 - 3\alpha & \beta \end{array}\right)$$

   Wie man sieht, hängt der Rang von A davon ab, welchen Wert α hat:

   - Ist $\alpha \neq 0$, so ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$. In diesem Fall hat A und damit auch $(A \,|\, b)$ vollen Rang, so daß das Gleichungssystem lösbar ist.

     Die Dimension des Lösungsraumes ist dann $4 - \mathrm{Rang}(A) = 1$. (Auch dies hätten wir früher gewußt: Beim Berechnen der Lösung ergibt sich genau *ein* freier Parameter.)

- Ist $\alpha = 0$, so ist $\operatorname{Rang}(A) = 2$, und es ist genau dann auch $\operatorname{Rang}(A\,|\,b) = 2$, wenn gleichzeitig $\beta = 0$ ist. Nur in diesem Fall ist das Gleichungssystem lösbar, und die Dimension des Lösungsraumes ist dann $4 - \operatorname{Rang}(A) = 2$.

b) Im Fall $\alpha = \beta = 1$ lautet die oben berechnete Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

aus der sich ohne große Mühe der Lösungsraum

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1-7\lambda \\ 3\lambda \\ 1+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_p} + \underbrace{\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=L_0}$$

ergibt.

Im Fall $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir stattdessen die umgeformte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

die zum Lösungsraum

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\lambda \\ -1+\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_p} + \underbrace{\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=L_0}$$

führt.

Aufgabe T-3. Wir gehen wie in Aufgabe T-1 vor und klären zuerst mit Hilfe der Determinante die Invertierbarkeit von A_t. Da A_t aber als Produkt zweier Dreiecksmatrizen gegeben ist, deren Determinante ja besonders einfach zu berechnen ist, empfiehlt es sich, das Matrixprodukt nicht zuerst zu berechnen, sondern den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden:

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = t \cdot t = t^2.$$

Damit ist A_t für $t \neq 0$ invertierbar und hat damit den Rang 3.
Für $t = 0$ dagegen ergibt sich

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier erkennt man, daß $\operatorname{Rang}(A_0) = 2$ ist, denn er ist ≥ 2, weil nicht alle Zeilen (oder Spalten) Vielfache voneinander sind, und er ist < 3, weil die Matrix nachweislich nicht invertierbar ist (oder, für Scharfblickende: weil die mittlere Zeile/Spalte die Summe der beiden äußeren ist).

Aufgabe T-4. Anstatt die Determinante zu berechnen und zu faktorisieren (was selbstverständlich auch möglich wäre: es ergibt sich die Determinante $\frac{1}{2}a^4 - 4a^2 + 8 = \frac{1}{2}(a^4 - 8a^2 + 16) = \frac{1}{2}(a^2 - 4)^2$), arbeiten wir diesmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2 \\ -2\alpha & -\frac{3}{2}\alpha & -2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 - 1 & 2 - \frac{1}{4}\alpha^3 \\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 8 - \alpha^3 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es für den Rang von A zwei Möglichkeiten:

- Ist $\alpha^2 \neq 4$, also $\alpha \neq \pm 2$, so ist $\operatorname{Rang}(A) = 3$ und damit $\dim U = 3 - \operatorname{Rang}(A) = 0$ (in diesem Fall ist A ja auch invertierbar).
- Ist $\alpha^2 = 4$, also $\alpha = \pm 2$, so ist $\alpha^3 = \pm 8$. Damit gibt es zwei Möglichkeiten für das Aussehen der zuletzt gewonnenen Dreiecksmatrix: Für $\alpha = 2$ lautet sie

  $$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  so daß $\operatorname{Rang}(A) = 1$ und damit $\dim U = 3 - \operatorname{Rang}(A) = 2$ ist.

  Für $\alpha = -2$ ergibt sich dagegen die Matrix

  $$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  also ist $\operatorname{Rang}(A) = 2$ und damit $\dim U = 3 - \operatorname{Rang}(A) = 1$.

(Der einzige Fall, der nicht vorkam, war also der Fall $\dim U = 3$. Dieser würde aber auch nur dann eintreten, wenn A die Nullmatrix wäre.)