Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 12. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Wir formen beide Matrizen mittels elementarer Zeilenumformungen um, bis sie Zeilenstufenform annehmen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Gleichungssystemen sind also jeweils x_3, x_4 freie Parameter. Daraus ergibt sich

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und da die beiden gefundenen Erzeuger von U linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis. Für W erhalten wir ebenso

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 2\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und auch hier bilden die beiden angegebenen Erzeuger eine Basis.

Zur Berechnung von $U \cap W$ gibt es nun zwei Möglichkeiten:

- Man sucht alle Vektoren, die sich sowohl als Element von U als auch als Element von W darstellen lassen; d.h. gesucht sind alle Parameterkombinationen $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 2\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die vier Parameter, und die sich ergebenden Vektoren sind dann die Elemente von $U \cap W$.

- Ich führe einen anderen Weg aus: Es wurde nämlich bereits (Aufgabe T-4 vom 9. Tutoriumsblatt) festgestellt, daß die Berechnung des *Schnittes* zweier Untervektorräume besonders günstig ist, wenn die Untervektorräume *implizit*, also jeweils durch ein Gleichungssystem gegeben sind (wie es hier der Fall ist): Dann erhält man ihren Schnitt durch Zusammenfügen (also Untereinanderschreiben) ihrer beiden Gleichungssysteme. Damit ist $U \cap W$ der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \\ \tau \end{pmatrix} \,\middle|\, \tau \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

also tut der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

b) In a) haben wir gesehen, daß $\dim U = 2 = \dim W$ ist. In einem zweidimensionalen Vektorraum sind zwei linear unabhängige Vektoren automatisch eine Basis; damit erhalten wir eine Basis von U, wenn wir v um einen beliebigen in U enthaltenen Vektor ergänzen, der kein Vielfaches von v ist – beispielsweise $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ebenso erhalten wir eine Basis von W aus v und (beispielsweise) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nach dem Beweis der Dimensionsformel aus der Vorlesung erhalten wir nun eine Basis von $U+W$: Denn v ist eine Basis von $U \cap W$, die durch u zu einer Basis von U und durch w zu einer Basis von W ergänzt werden kann. Damit ist u, v, w eine Basis von $U + W$.

Aufgabe T-2.

a) Das ist einfach die Dimensionsformel: Es ist

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) \overset{\text{nach Voraussetzung}}{=} \dim(V).$$

b) Laut Definition bedeutet (ii) genau, daß (i) *und* (iii) zutreffen; damit sind die Richtungen (ii) $\Longrightarrow$ (i) und (ii) $\Longrightarrow$ (iii) trivial. (Hier ist das Wort einmal erlaubt!)

Für die Richtung (i) $\Longrightarrow$ (ii) sei $U + W = V$. Dann ist insbesondere $\dim(U + W) = \dim(V)$, und nach a) folgt $\dim(U \cap W) = 0$, also $U \cap W = \{0\}$, und damit ist (ii) erfüllt.

Für die Richtung (iii) $\Longrightarrow$ (ii) sei $U \cap W = \{0\}$. Dann ist inbesondere $\dim(U \cap W) = 0$, und nach a) folgt $\dim(U + W) = \dim V$, also $U + W = V$ (ineinanderliegende Vektorräume gleicher endlicher Dimension sind gleich). Damit ist (ii) erfüllt.

Alternativ, aber vielleicht etwas knapp, hätte man die Lösung auch so formulieren können: Da $U + W = V$ äquivalent ist zu $\dim(U + W) = \dim V$, und $U \cap W = \{0\}$ äquivalent zu $\dim(U \cap W) = 0$, besagt a), daß die Aussagen (i) und (iii) äquivalent sind. Da aber (ii) äquivalent ist zu (i) $\wedge$ (iii), sind damit alle drei Aussagen äquivalent.

Aufgabe T-3. Hier ein ausgefülltes Formular:

Satz. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $U, W \subset V$ Untervektorräume mit $U \cap W = \{0\}$ (aber $U, W \neq \{0\}$). Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W \qquad (= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)).$$

Beweis. Es sei

$$\begin{array}{rl} u_1, \ldots, u_r & \text{eine Basis von } U, \\ w_1, \ldots, w_s & \text{eine Basis von } W. \end{array}$$

Behauptung. Dann ist $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ eine Basis von $U + W$.
(Warum genügt es, diese Behauptung zu beweisen?)

Erzeugendensystem. Es gilt

$$\begin{aligned} U + W &= \langle \underline{u_1, \ldots, u_r} \rangle + \langle \underline{w_1, \ldots, w_s} \rangle \\ &= \langle \underline{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s} \rangle, \end{aligned}$$

also erzeugen die Vektoren den Untervektorraum $U + W$.

Lineare Unabhängigkeit. Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_r, \tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r + \tau_1 w_1 + \ldots + \tau_s w_s = 0.$$

Dann ist

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = \underline{-\tau_1 w_1 + \ldots + (-\tau_s w_s)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung liegt im Untervektorraum $\underline{U}$, die rechte im Untervektorraum $\underline{W}$. Der gemeinsame Wert (beide Seiten sind ja gleich!) liegt also im Untervektorraum $\underline{U \cap W} = \{0\}$.
Also gilt $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0$ und ebenso $\underline{-\tau_1 w_1 + \ldots + (-\tau_s w_s)} = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_r$ folgt daraus $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Ebenso folgt aber $\underline{\tau_1 = \ldots = \tau_s = 0}$, und damit ist die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ bewiesen.

Aufgabe T-4.

a) Da sich der Zeilenrang einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht ändert, kann man beispielsweise folgendermaßen rechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen dieser Matrix sind linear unabhängig, wie man anhand der folgenden Überlegung sehen kann: Ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_3 & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & 4\lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so zeigt ein Blick auf den ersten Eintrag, daß $\lambda_3 = 0$ sein muß; der dritte Eintrag liefert dann $\lambda_1 = 0$, und der zweite schließlich $\lambda_2 = 0$. (Das gleiche Argument steht hinter der Beobachtung, daß Stufenspalten in einer Zeilenstufenform stets linear unabhängig sind. Es lohnt sich, das Erkennen solcher Strukturen zu üben!) Jedenfalls hat A damit Zeilenrang 3.

Für die Matrix B argumentieren wir ähnlich:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier erkennt man direkt, daß die ersten beiden Zeilen linear unabhängig sind (und alle drei Zeilen linear abhängig), also hat B den Zeilenrang 2.

b) Das gleiche mit Spaltenumformungen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rotatebox[origin=c]{90}{$\curvearrowright$} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \rotatebox[origin=c]{90}{$\curvearrowright$} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die drei Spalten dieser Matrix sind linear unabhängig, also hat A den Spaltenrang 3.

Ähnlich für B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \rotatebox[origin=c]{90}{$\curvearrowright$} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \rotatebox[origin=c]{90}{$\curvearrowright$} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die verbliebene Matrix hat zwei linear unabhängige Spalten, also hat B den Spaltenrang 2.

(De facto sind, wie gesagt, Zeilen- und Spaltenrang immer identisch, und beide ändern sich insbesondere weder bei Zeilen- noch bei Spaltenumformungen. Dies wurde auch in der Vorlesung direkt bewiesen. Man kann sich jedoch klarmachen, daß die Konstanz der Zeilenrangs unter Zeilenumformungen viel einfacher zu beweisen war als die Konstanz des Zeilenrangs unter Spaltenumformungen.)