Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
12. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1.

a) Man lese den Abschnitt über „direkte Summen“ (5.23–5.25) in der Vorlesung sorgfältig nach.

b) Man denke über die folgende (korrekte!) Aussage nach:

> „Für Untervektorräume U, W eines Vektorraumes V haben wir nicht definiert, was $U \oplus W$ sein soll. Wir haben nur definiert, was es bedeuten soll, daß $U \oplus W = V$ gilt.“

Aufgabe V-2. Man begründe: Sind $U, W \subset \mathbb{R}^2$ eindimensionale Untervektorräume, und ist $U \neq W$, so ist $U \oplus W = \mathbb{R}^2$.

Aufgabe V-3. Man studiere in der Vorlesung den Beweis der Dimensionsformel (5.18) sorgfältig und fasse das Vorgehen möglichst prägnant zusammen.

Aufgabe V-4.

a) Man beschäftige sich erneut mit Aufgabe Ü-4 vom 2. Übungsblatt und vergleiche die folgende Aussage mit derjenigen aus Aufgabe V-1 b):

> „In der Aufgabe wurde nicht definiert, was der ‘Zeilenrang’ einer Matrix sein soll, sondern nur, was es bedeuten soll, daß eine Matrix den Zeilenrang 1 hat.“

b) Man lese die Definition von Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix (6.1 in der Vorlesung) sorgfältig nach und überlege, warum die Definition der Aussage „Eine Matrix hat den Zeilenrang 1“ aus Aufgabe Ü-4 vom 2. Übungsblatt mit der allgemeinen Definition des Zeilenrangs in Einklang steht.

c) Man lese den Abschnitt über die Äquivalenznormalform einer Matrix (2.29–2.30 in der Vorlesung) sorgfältig nach und berechne die Äquivalenznormalform für zwei Matrizen eigener Wahl.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die Untervektorräume $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ und $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid B \cdot x = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$.

a) Man bestimme Basen von U und W sowie ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

b) Man ergänze v zu Basen von U und W und gebe eine Basis von $U + W$ an.

Aufgabe T-2. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V < \infty$, und es seien $U, W \subset V$ Untervektoräume mit der Eigenschaft $\dim U + \dim W = \dim V$.

a) Man beweise, daß dann auch $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim V$ ist.

b) Man folgere, daß dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Es ist $U + W = V$.

   (ii) Es ist $U \oplus W = V$.

   (iii) Es ist $U \cap W = \{0\}$.

   (Hinweis: Für die Richtungen (ii) $\Longrightarrow$ (i) und (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ist nichts zu tun; warum? – Für die jeweiligen Gegenrichtungen hilft a).)

c) Man denke vor dem Hintergrund dieser Aufgabe erneut über Aufgabe V-2 nach.

Aufgabe T-3. In dieser Aufgabe wollen wir den Beweis der Dimensionsformel (Satz 5.18) aus der Vorlesung im dort nicht ausführlich behandelten Fall $U \cap W = \{0\}$ als Lückentext erarbeiten. Also:

Satz. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $U, W \subset V$ Untervektorräume $\underline{\text{mit } U \cap W = \{0\}}$ (aber $U, W \neq \{0\}$). Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W \qquad (= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)).$$

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} u_1, \ldots, u_r &\quad \text{eine Basis von } U, \\ w_1, \ldots, w_s &\quad \text{eine Basis von } W. \end{aligned}$$

Behauptung. Dann ist $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ eine Basis von $U + W$.
(Warum genügt es, diese Behauptung zu beweisen?)

Erzeugendensystem. Es gilt

$$\begin{aligned} U + W &= \langle \underline{\qquad\qquad} \rangle + \langle \underline{\qquad\qquad} \rangle \\ &= \langle \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \rangle, \end{aligned}$$

also erzeugen die Vektoren den Untervektorraum $U + W$.

Lineare Unabhängigkeit. Es seien $\mu_1, \dots, \mu_r, \tau_1, \dots, \tau_s \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r + \tau_1 w_1 + \ldots + \tau_s w_s = 0.$$

Dann ist

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung liegt im Untervektorraum __, die rechte im Untervektorraum __. Der gemeinsame Wert (beide Seiten sind ja gleich!) liegt also im Untervektorraum ______ $= \{0\}$. Also gilt $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0$ und ebenso ________________ $= 0$. Wegen ________________________________ folgt daraus $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Ebenso folgt aber ________________, und damit ist die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ bewiesen.

Bemerkung: Strenggenommen wäre es nicht unbedingt nötig, diesen Beweis im Fall $U \cap W = \{0\}$ gesondert zu führen. Der Beweis aus der Vorlesung funktioniert völlig allgemein, wenn man bereit ist, auch dem Nullvektorraum $\{0\}$ eine Basis zuzubilligen, die dann eben aus *null* Vektoren besteht; ebenso kann man auch auf die eigene Behandlung der Fälle $U = \{0\}$ bzw. $W = \{0\}$ verzichten.

Aufgabe T-4. Für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

bestimme man jeweils

a) durch elementare Zeilenumformungen den Zeilenrang,

b) durch elementare Spaltenumformungen den Spaltenrang.

(Laut Satz 6.8 der Vorlesung stimmen Zeilen- und Spaltenrang für jede Matrix überein, so daß zukünftig nur noch eine der beiden Berechnungen durchgeführt werden muß.)

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 15.–19. Januar 2015 behandelt.