Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Wir untersuchen den von $v_1, \dots, v_4$ erzeugten Unterraum $V := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Wenn $V \subsetneq \mathbb{R}^4$ ist, dann haben wir gewonnen – denn dann können wir $U = V$ nehmen, oder allgemeiner jeden beliebigen Untervektorraum U mit $V \subset U \subsetneq \mathbb{R}^4$. (Umgekehrt gilt: Ist $V = \mathbb{R}^4$, so ist die behauptete Aussage falsch, denn nach Vorlesung ist V der *kleinste* Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, der v_1, v_2, v_3, v_4 enthält.)

Um nachzuweisen, daß $V \subsetneq \mathbb{R}^4$ ist, ist die einfachste Möglichkeit, die Dimension $\dim V$ zu berechnen: Ist nämlich $\dim V < 4$, so folgt automatisch $V \neq \mathbb{R}^4$. (Eine andere Möglichkeit wäre, einen Vektor in $\mathbb{R}^4$ zu suchen, der nicht in V enthalten ist. Dies ist jedoch mit beträchtlich größerem Aufwand verbunden.) Dazu gibt es in der Vorlesung ein Kriterium (Beispiel 5.11 b)): Man schreibt die erzeugenden Vektoren nebeneinander in eine Matrix und bringt diese Matrix durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Diejenigen Ausgangsvektoren, deren Spalten dabei zu Stufenspalten werden, bilden eine Basis von V.

Also ans Werk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier sind die ersten drei Spalten Stufenspalten; damit bilden die ersten drei Ausgangsvektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von V – es ist also $\dim V = 3$.

Wir können also $U = V$ nehmen und sehen, daß die gegebenen Vektoren tatsächlich in einem echten Unterraum von $\mathbb{R}^4$ liegen.

Aber es gilt noch mehr: Dieser Unterraum ist nämlich eindeutig bestimmt! Gäbe es nämlich irgendeine andere Möglichkeit, U zu wählen, so wäre immer noch $V \subset U \subset \mathbb{R}^4$, woraus folgt $3 = \dim V \leq \dim U \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Damit ist also $\dim U = 3$ oder $\dim U = 4$. Im ersten Fall gilt $U = V$ (denn zwei ineinanderliegende Vektorräume gleicher Dimension sind gleich) – diesen Fall kennen wir schon –; im zweiten Fall gilt $U = \mathbb{R}^4$ (aus dem gleichen Grund) – und dieser Fall ist ausgeschlossen.

b) Wir haben in a) gesehen, daß $U = V$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugte Untervektorraum ist (und daß er bereits von v_1, v_2, v_3 erzeugt wird). Die Bestimmung aller Elemente dieses Untervektoraums ist nun einfach wieder die Umrechnung einer expliziten Angabe eines Untervektorraums in eine implizite Angabe: Ein Vektor $x = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann in V, wenn das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right)$$

lösbar ist. (Die zum Vektor v_4 gehörige Spalte können wir weglassen, weil V bereits von v_1, v_2, v_3 erzeugt wird; sie würde aber auch nicht schaden.) Diese Matrix können wir wie oben auf Zeilenstufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -3 & b_4 - b_2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 - b_2 - 3b_3 + b_4 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also genau dann lösbar (d.h. x liegt in V), wenn $3b_1 - b_2 - 3b_3 + b_4 = 0$ ist. Also ergibt sich

$$U = V = \left\{ x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 3b_1 - b_2 - 3b_3 + b_4 = 0 \right\}.$$

Im Prinzip hätte man die in b) durchgeführte Rechnung, zumindest, wenn man sie mit der „vollen" Ausgangsmatrix (ohne Fortlassung der v_4-Spalte) durchführt, auch als Antwort in a) anbringen können: Wir haben festgestellt, daß $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ die Lösungsmenge einer einzelnen homogenen linearen Gleichung ist. Da diese Lösungsmenge nach der Theorie linearer Gleichungssysteme nicht ganz $\mathbb{R}^4$ ist, ist auch damit bewiesen, daß $V \subsetneq \mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe T-2. Einfache Kriterien dafür, wann gegebene Vektoren eine Basis des betrachteten Vektorraumes bilden, haben wir hauptsächlich in Vektorräumen der Form $\mathbb{R}^n$. Der Vektorraum V ist aber abstrakt und hat nicht unbedingt diese Form; es gibt aber eine Technik, Fragen über V umzuformulieren in Fragen an einen $\mathbb{R}^n$, nämlich die Wahl von Koordinaten (also die Verwendung einer Koordinatenabbildung).
Es sei also $p : V \to \mathbb{R}^4$ die Koordinatenabbildung von V bezüglich der gegebenen Basis b_1, b_2, b_3, b_4. Um zu untersuchen, ob die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ eine Basis von V bilden, können wir nun die gleichwertige Frage untersuchen, ob ihre Bilder $p(v_1), \ldots, p(v_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Nach Definition der Koordinatenabbildung ist aber

$$p(v_1) = p(b_1 + \beta_1 \cdot b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p(v_2) = p(b_2 + \beta_1 2 \cdot b_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$p(v_3) = p(\beta_3 \cdot b_1 + b_3) = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p(v_4) = p(\beta_4 \cdot b_2 + b_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und diese Vektoren bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^4$, wenn die aus ihnen gebildete Matrix invertierbar ist – was man zum Beispiel mit der Determinante überprüfen kann. Nun ist aber

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_1\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \beta_2\beta_4 \end{pmatrix} = (1 - \beta_1\beta_3)(1 - \beta_2\beta_4).$$

Damit ist die Matrix genau dann invertierbar (und damit $v_1, \ldots, v_4$ eine Basis von V), wenn $(1 - \beta_1\beta_3)(1 - \beta_2\beta_4) \neq 0$ ist. (Dies ist im übrigen äquivalent dazu, daß weder $\beta_1\beta_3$ noch $\beta_2\beta_4$ den Wert 1 hat.)

Aufgabe T-3.

a) Aufgaben dieses Typs haben wir inzwischen des öfteren gelöst: Man bestimmt zuerst einen Vektor $0 \neq v \in U \cap W$. Daß dann nicht nur $\mathbb{R}v \subset U \cap W$ gilt, sondern sogar $\mathbb{R}v = U \cap W$, „passiert" in diesen Aufgaben dann einfach; warum und wann dies geschieht, können wir in Kürze mit Dimensionsüberlegungen verstehen.

Um einen Vektor $v \in U \cap W$ zu finden, brauchen wir Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1u_1 + a_2u_2 = b_1w_1 + b_2w_2$ (und dieser gemeinsame Wert beider Seiten wird dann v sein). Dies schreiben wir um zu $a_1u_1 + a_2u_2 + b_1 \cdot (-w_1) + b_2 \cdot (-w_2) = 0$, und dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem (für a_1, a_2, b_1, b_2) mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 2\lambda \\ -4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{für beliebiges } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda = 1$ beispielsweise ergibt sich $a_1 = -3$ und $a_2 = 2$, also erhalten wir den in $U \cap W$ liegenden Vektor

$$v = -3u_1 + 2u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ebensogut hätten wir $b_1 = -4$ und $b_2 = 1$ verwenden können und mit der Darstellung $-4w_1 + w_2$ den gleichen Vektor v erhalten.)

Da jedes andere Element von $U \cap W$ sich (das ergab unsere Rechnung) als Vielfaches von v schreiben läßt, folgt außerdem $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

b) Auf jeden Fall wird $U + W$ von u_1, u_2, w_1, w_2 erzeugt (denn es ist $\langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle = U + W$). Da wir jedoch gesehen haben, daß $-3u_1 + 2u_2 = -4w_1 + w_2$ ist, also $w_2 = -3u_1 + 2u_2 + 4w_1$, können wir den Vektor w_2 fortlassen und erhalten $U + W = \langle u_1, u_2, w_1 \rangle$.

Um nachzuweisen, daß diese drei verbliebenen Vektoren u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U + W$ bilden, gibt es verschiedene Möglichkeiten: Zum einen kann man direkt ihre lineare Unabhängigkeit nachweisen. Wir zeigen jedoch einen einfacheren Weg: Es genügt nämlich zu zeigen, daß $\dim(U + W) = 3$ ist! (Denn dann ist ein Erzeugendensystem aus drei Vektoren automatisch eine Basis.)

Nach der Dimensionsformel ist $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. Es ist $\dim U = \dim W = 2$ (denn beide Untervektorräume werden von zwei Vektoren erzeugt, die offensichtlich linear unabhängig sind, weil sie keine Vielfachen voneinander sind), und es ist $\dim(U \cap W) = 1$ (denn wir haben gesehen, daß $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$ ist, d.h. v ist ein Erzeugenden„system" von $U \cap W$ und auch eine Basis, weil ein einzelner Vektor, der nicht der Nullvektor ist, stets linear unabhängig ist.) Also ist tatsächlich $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$, wie behauptet.

Die Koordinaten des Vektors w_2 bezüglich dieser Basis ergeben sich aus der Beziehung $w_2 = -3u_1 + 2u_2 + 4w_1$, und zwar ist seine Koordinatenspalte $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Ob e_1 in $U + W = \langle u_1, u_2, w_1 \rangle$ liegt, ist genau die Frage nach der Lösbarkeit des inhomogenen linearen Gleichungssystems, das man symbolisch als

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w_1 & | & e_1 \end{pmatrix}$$

schreiben kann. Zu ihrer Beantwortung helfen, wie immer, elementare Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w_1 & | & e_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar mit der (eindeutig bestimmten) Lösung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also *ist* e_1 in $U + W$ enthalten, und zwar ist $e_1 = 2u_1 - u_2 - w_1$.

Aufgabe T-4. Starrt man lange genug auf die Definition der gegebenen v_1, v_2, v_3, v_4 Vektoren, erkennt man, daß sie nicht linear unabhängig sind, denn es ist $v_1 = v_3 + v_4$.

Warum aus $v_1 = v_3 + v_4$ lineare Abhängigkeit folgt, kann man auf zwei Arten sehen: Es folgt zum einen $v_1 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$, und dann sind die vier Vektoren laut Vorlesung nicht linear unabhängig; oder man stellt direkt um zur linearen Abhängigkeitsgleichung $v_1 - v_3 - v_4 = 0$.

Es ist also $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ (und die gesuchte Dimension kann damit nur noch höchstens 3 sein).

Ich behaupte nun, daß v_2, v_3, v_4 linear unabhängig sind – womit sie eine Basis des von $v_1, \ldots, v_4$ aufgespannten Untervektorraums bilden, der folglich die Dimension 3 hat. Angenommen nämlich, wir hätten Zahlen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ gegeben (die Numerierung ist so merkwürdig gewählt, damit sie mit der Numerierung der Vektoren übereinstimmt, die ja nichts dafür kommen, daß wir ausgerechnet den *ersten* Vektor v_1 weggelassen haben) mit

$$\begin{aligned} 0_V &= \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \\ &= \alpha_2 \cdot (b+c) + \alpha_3 \cdot (c+d) + \alpha_4 \cdot (a+b) && \text{(Sammeln nach } a, b, c, d \ldots) \\ &= \alpha_4 \cdot a + (\alpha_2 + \alpha_4) \cdot b + (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot c + \alpha_3 \cdot d. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind aber $a, b, c, d \in V$ linear unabhängig! Also muß $\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 = 0$ sein, woraus sofort folgt, daß $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ist. Also sind v_2, v_3, v_4 linear unabhängig (und, wie gesagt, ist die gesuchte Dimension folglich 3).