Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
11. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1.

a) Man lese die Basis-Kriterien 5.12 und 5.13 in der Vorlesung sorgfältig nach und formuliere ihre Aussage in eigenen Worten. Zur Lösung welcher Probleme lassen sie sich einsetzen? (Für mögliche Antworten ist ein Blick in 5.14 hilfreich.)

b) Man lese die Sätze 5.16 und 5.18 (Dimensionsformel) in der Vorlesung sorgfältig nach.

Aufgabe V-2. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ seien die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gegeben, und es sei $w = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ein weiterer Vektor. Bekanntlich ist e_1, e_2 eine Basis von V.

a) Man schreibe w als Linearkombination von e_1 und e_2.

b) Man verwende das Austauschlemma 5.13, um die Frage zu untersuchen: Für welche Werte von α bzw. β ist e_1, w eine Basis von V? Wann ist w, e_2 eine Basis von V?

c) Man beweise die in b) gefundenen Aussagen erneut, diesmal unter Verwendung von Determinanten (vgl. Satz 5.2 c) aus der Vorlesung).

Aufgabe V-3. Es sei der Vektorraum $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\3\\9\\12\end{pmatrix},$$

gegeben.

a) Man weise nach, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

b) Man weise nach, daß v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, und folgere mit Lemma 5.12, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von V ist.

c) Man weise nach, daß auch v_1, v_2, v_4 bzw. v_1, v_3, v_4 bzw. v_2, v_3, v_4 Basen von V sind.

d) Inwiefern vereinfachen sich die Aufgaben a)–c), wenn man weiß, daß $4v_1 - 3v_2 + 2v_3 - v_4 = 0$ ist?

Aufgabe V-4. Es sei $V = \mathbb{R}^n$, und es sei $H \subset V$ eine Hyperebene in V (zu diesem Begriff vgl. 5.17 in der Vorlesung). Es sei $U \subset V$ ein beliebiger weiterer Untervektorraum.

a) Für $\dim(U + H)$ gibt es nur zwei mögliche Werte. Welche sind das?

b) Nach der Dimensionsformel gibt es folglich auch für $\dim(U \cap H)$ nur zwei mögliche Werte. Welche sind das?

Lösung:
a) Es kann nur $\dim(U + H) = n$ oder $\dim(U + H) = n - 1$ sein, denn wegen $H \subset U + H \subset V$ ist $\dim H \leq \dim(U + H) \leq \dim V$, also $n - 1 \leq \dim(U + H) \leq n$.
b) Die Dimensionsformel liefert $\dim(U \cap H) = \dim U + \dim H - \dim(U + H)$. Setzt man das Resultat von a) ein, ergibt sich, daß $\dim(U \cap H) = \dim(U)$ oder $\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1$ sein muß.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1 (Staatsexamen Frühjahr 2000). Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 und v_4 in einem echten Untervektorraum $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ von $\mathbb{R}^4$ enthalten sind.

b) Man bestimme alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, die in dem Untervektorraum $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ liegen.

(Bemerkung: Der Autor der Staatsexamensaufgabe bezieht sich in b) darauf, daß der Untervektorraum in a) sogar eindeutig bestimmt ist. Weshalb ist das der Fall?)

Aufgabe T-2 (Staatsexamen Frühjahr 2000). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von V. Für die reellen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ betrachte man die Vektoren $v_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3$, $v_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4$, $v_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3$ und $v_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$. Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 genau dann eine Basis von V ist, wenn $(1 - \beta_1\beta_3)(1 - \beta_2\beta_4) \neq 0$ ist.

Aufgabe T-3. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum sind die vier Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ gegeben.

a) Man bestimme ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

b) Man zeige, daß u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U + W$ bilden, und berechne die Koordinaten von w_2 bezüglich dieser Basis.

c) Man entscheide, ob der Einheitsvektor e_1 in $U + W$ liegt.

Aufgabe T-4 (Staatsexamen Frühjahr 2002). Es seien a, b, c und d linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannten Unterraums.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 8.–12. Januar 2015 behandelt.