Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Zu zeigen ist, daß das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht *nur* den Nullvektor als Lösung hat (gleichbedeutend: daß nach Umformung der Matrix zu Zeilenstufenform nicht jede Spalte Stufenspalte ist, oder auch – da es zufällig *vier* Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind – daß die Matrix nicht invertierbar ist). Also ans Werk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems in der erreichten Form entpuppt sich x_4 als freier Parameter, also gibt es außer der immer vorhandenen „trivialen“ Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch weitere Lösungen, und damit sind die Vektoren linear abhängig.

(Stattdessen hätte man auch etwa mit Hilfe der Determinante die Nicht-Invertierbarkeit der Matrix A nachweisen können.)

b) Hier geht man ebenso vor wie in Teil a) (nur möchte man diesmal sehen, daß der Nullvektor die einzige Lösung *ist*). Da aber die zu untersuchende Matrix einfach aus der Matrix A durch Weglassen der dritten Spalte hervorgeht, können wir die gleichen Zeilenumformungen vornehmen wie in a) und erhalten gleiche Resultat wie dort, nur eben ohne die dritte Spalte:

$$A' = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \quad \dots \quad \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der zuletzt erhaltenen Matrix *ist* nun jede Spalte Stufenspalte, also ist die Lösung des homogenen Gleichungssystems eindeutig bestimmt (nämlich, wie immer bei homogenen Systemen, der Nullvektor). Also sind v_1, v_2, v_4 linear unabhängig.

Damit gilt aber $v_3 \in \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ (denn sonst könnte man v_3 hinzunehmen und würde ein linear unabhängiges System erhalten, was nach a) nicht der Fall ist), und damit folgt $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$, d.h. die Vektoren v_1, v_2, v_4 sind auch ein Erzeugendensystem von V und damit eine Basis.

Um eine (genauer: die eindeutig bestimmte!) Darstellung von v_3 als Linearkombination von v_1, v_2, v_4 zu erhalten, ist das inhomogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 & | & v_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

zu lösen. Das Lösungsverfahren wurde schon oft genug vorgeführt; ich gebe nur das Resultat an: Der (eindeutig bestimmte) Lösungsvektor lautet $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, also gilt

$$v_3 = 4 \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + 1 \cdot v_4,$$

was man auch durch direktes Nachrechnen verifizieren kann.

c) Man muß einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ finden, für den aus v_1, v_2, v_4, v gebildete 4×4-Matrix invertierbar ist. Die einfachste Möglichkeit, dies zu erreichen, ist ein „Probieren auf gut Glück“: Man schreibt *irgendeinen* Vektor für v hin und überprüft, ob er das Gewünschte tut. (Dieses Verfahren ist besser, als man vermuten würde, denn man muß beträchtliches Pech haben, um einen „nicht funktionierenden“ Vektor zu erwischen). Ich probiere es beispielsweise mit $v = e_1$: Es ist

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 & e_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots = 3 \neq 0,$$

also ist v_1, v_2, v_4, e_1 eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe T-2. Da $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ die Basis $1, x, x^2, x^3$ besitzt, ist $\dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4$. Da *vier* Vektoren angegeben sind, können wir uns aussuchen, ob wir sie auf „lineare Unabhängigkeit“ oder „Erzeugendensystem“ untersuchen (denn die Begriffe sind für $\underline{n}$ Vektoren in einem $\underline{n}$-dimensionalen Vektorraum äquivalent); ich führe beide Rechnungen vor:

Erzeugendensystem. Hierfür genügt es zu zeigen, daß

$$1, x, x^2, x^3 \in \big\langle 1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1 \big\rangle$$

gilt – denn dann folgt

$$\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = \big\langle 1, x, x^2, x^3 \big\rangle \subset \big\langle 1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1 \big\rangle \quad (\subset \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})).$$

Dies kann man mit einem linearen Gleichungssystem erledigen, aber einfacher geht es direkt, indem man über die Beziehungen

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ x &= (x+1) - 1, \\ x^2 &= (x^2+x+1) - (x+1), \\ x^3 &= (x^3+x^2+x+1) - (x^2+x+1) \end{aligned}$$

meditiert.

Lineare Unabhängigkeit. Wenn man diesen Weg wählt, so ist zu zeigen, daß aus einer Beziehung

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x+1) + \lambda_3 \cdot (x^2+x+1) + \lambda_4 \cdot (x^3+x^2+x+1) = 0$$

(im Sinne der Gleichheit von Polynomen!) folgt, daß alle $\lambda_i = 0$ sein müssen. Aber die Beziehung läßt sich umschreiben als

$$\lambda_4 x^3 + (\lambda_4+\lambda_3)x^2 + (\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2)x + (\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1) = 0,$$

und das bedeutet, daß die vier Vorfaktoren λ_4, $\lambda_4+\lambda_3$, $\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2$ und $\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1$ allesamt verschwinden – woraus der Reihe nach folgt, daß alle λ_i selbst verschwinden.

Aufgabe T-3.

a) Während die Abbildungsvorschrift von q sich einfach formulieren läßt als

„Gegeben $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$, bilde den Vektor $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_1 v_n \in V$“,

ist die Konstruktion von p komplizierter:

„Gegeben $v \in V$, suche die Darstellung als Linearkombination $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ (diese existiert und ist eindeutig bestimmt!) und bilde dann den Vektor $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.“

Es ist nützlich, dies im (Hinter-)Kopf zu behalten.

Zur Berechnung von $p \circ q$ starten wir mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Es ist $q(x) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Um nun $p(q(x))$ zu berechnen, müssen wir diesen Vektor als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ schreiben – hier ist nichts mehr zu tun, denn er ist bereits in dieser Form *gegeben*! Der Spaltenvektor $p(q(x))$ enthält dann die Koeffizienten dieser Linearkombination, aber diese sind genau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, also ist $p(q(x)) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = x$, und das beweist $p \circ q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Zur Berechnung von $q \circ p$ starten wir mit einem Vektor $v \in V$. Zur Berechnung von $p(v)$ schreiben wir $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ mit geeigneten (eindeutig bestimmten) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, und dann ist $p(v) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Nach Definition von q ist dann $q(p(v)) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, aber dies ist einfach wieder v – also ist $q(p(v)) = v$ für alle $v \in V$, und das bedeutet $q \circ p = \mathrm{id}_V$.

b) Dies ist aufgrund der einfachen Definition von q eine reine Rechnerei:

$$q(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 0_{\mathbb{R}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{R}} \cdot v_n = 0_V + \cdots + 0_V = 0_V,$$

$$\begin{aligned} q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}) &= q(\begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix}) = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)v_n \\ &= (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) = q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) + q(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(\alpha \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) &= q(\begin{pmatrix} \alpha \cdot \lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \lambda_n \end{pmatrix}) = (\alpha \cdot \lambda_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha \cdot \lambda_n) \cdot v_n \\ &= \alpha \cdot (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \alpha \cdot q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

c) Wie im Hinweis empfohlen, können wir folgendermaßen beginnen:

$$\begin{aligned} & p(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot p(v) \\ \iff\quad & q(p(\lambda \cdot v)) = q(\lambda \cdot p(v)) \\ \overset{b)}{\iff}\quad & q(p(\lambda \cdot v)) = \lambda \cdot q(p(v)) \\ \overset{a)}{\iff}\quad & \lambda \cdot v = \lambda \cdot v \quad \checkmark \text{wahre Aussage.} \end{aligned}$$

Für die Summe von Vektoren geht die Rechnung ähnlich:

$$\begin{aligned} & p(u + v) = p(u) + p(v) \\ \iff\quad & q(p(u + v)) = q(p(u) + p(v)) \\ \overset{b)}{\iff}\quad & q(p(u + v)) = q(p(u)) + q(p(v)) \\ \overset{a)}{\iff}\quad & u + v = u + v \quad \checkmark \text{wahre Aussage,} \end{aligned}$$

und für den Nullvektor ebenso:

$$\begin{aligned} & p(0_V) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff\quad & q(p(0_V)) = q(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \\ \overset{b)}{\iff}\quad & q(p(0_V)) = 0_V \quad \checkmark \text{wahre Aussage nach a).} \end{aligned}$$

(Natürlich ist es auch möglich, die Rechenregeln aus c) für die Koordinatenabbildung p direkt, also ohne Rückgriff auf die inverse Abbildung q, zu beweisen. Dies führt jedoch zu zwar logisch unbedenklichen, aber einigermaßen verwirrenden Argumenten, in denen die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Linearkombination von Basisvektoren eine wesentliche Rolle spielt. Der hier gewählte Weg vermeidet diese Schwierigkeiten, indem er die entsprechenden Rechenregeln für die leichter zugängliche Abbildung q nachweist und dann mit formalen Argumenten auf die Abbildung p überträgt.)

Aufgabe T-4.

a) Wir argumentieren ähnlich wie in Aufgabe T-3 c), indem wir ausnutzen, daß das Anwenden einer bijektiven Abbildung eine Äquivalenzumformung ist:

$$\begin{aligned} & v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r \\ \iff\quad & p(v) = p(\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r) \\ \overset{\text{T-4 c)}}{\iff}\quad & p(v) = p(\mu_1 w_1) + \ldots + p(\mu_r w_r) \\ \overset{\text{T-4 c)}}{\iff}\quad & p(v) = \mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r). \end{aligned}$$

b) „$\Longrightarrow$“. Angenommen, $w_1, \ldots, w_r$ ist ein Erzeugendensystem von V. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig; wir müssen zeigen, daß x Linearkombination von $p(w_1), \ldots, p(w_r)$ ist. Betrachte den Vektor $q(x) \in V$: Nach Voraussetzung gibt es Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ mit $q(x) = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r$. Nach a) folgt daraus jedoch $p(q(x)) = \mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r)$, also wegen $p(q(x)) = x$ die Aussage $x \in \langle p(w_1), \ldots, p(w_r) \rangle$.

„$\Longleftarrow$“. Angenommen, $p(w_1), \ldots, p(w_r)$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Sei $v \in V$ beliebig; wir müssen zeigen, daß v Linearkombination von $w_1, \ldots, w_r$ ist. Betrachte den Spaltenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^n$: Nach Voraussetzung gibt es Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ mit $p(v) = \mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r)$. Nach a) folgt daraus $v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r$, und dies war zu beweisen.

c) „$\Longrightarrow$“. Angenommen, $w_1, \ldots, w_r \in V$ sind linear unabhängig. Wir müssen nachweisen, daß dann auch $p(w_1), \ldots, p(w_r) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Seien also $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ gegeben mit $\mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r) = 0 = p(0_V)$. Nach a) gilt dann $0 = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_r w_r$, und aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_r$ folgt dann $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$, was zu beweisen war.

„$\Longleftarrow$“. Angenommen, $p(w_1), \ldots, p(w_r) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig. Wir müssen nachweisen, daß dann auch $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Seien also $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ gegeben mit $\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r = 0_V$. Nach a) gilt dann auch $\mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r) = p(0_V) = 0$, und aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $p(w_1), \ldots, p(w_r)$ folgt daraus $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$, was zu beweisen war.