

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

1. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man lese die „Definition“ der Zeilenstufenform einer Matrix und die zugehörigen Beispiele sorgfältig nach (1.4 und 1.5 in der Vorlesung)

Aufgabe V-2. Von den folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

haben A und B Zeilenstufenform, C dagegen nicht. Man überprüfe diese Aussagen und zeichne bei den Matrizen in Zeilenstufenform die zugehörige „Treppe“ ein.

Aufgabe V-3. Man bestimme, welche der folgenden Matrizen Zeilenstufenform haben und welche nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe V-4. Man erkläre einem geeigneten Mitmenschen (Partner, Mitbewohner, Eltern, Geschwister...¹) die Begriffe „Matrix“ und „Zeilenstufenform“ so weit, daß die-/derjenige die Aufgaben V-2 und V-3 selbständig lösen kann.

¹Mathematiker, Physiker, Ingenieure usw. sind ausgeschlossen!

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Man bestimme jeweils die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 6 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe T-2. Man bestimme jeweils die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme mit den erweiterten Koeffizientenmatrizen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 24 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Aufgabe T-3 (Staatsexamensaufgabe vom Frühjahr 1994 und noch immer aktuell).

Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 & = & 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 2 \\ & 5x_2 + 2x_3 & = & t \end{array}$$

Aufgabe T-4. Die Quersumme einer dreistelligen natürlichen Zahl beträgt 18. Vertauscht man die ersten beiden Ziffern der Zahl, so vergrößert sie sich um 180. Vertauscht man die hinteren beiden Ziffern der Zahl, so vergrößert sie sich um 18. Um welche Zahl handelt es sich?