Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2 = 0$ („leere Summe") und $\frac{1}{3}n(4n^2-1) = 0$, die Behauptung stimmt also.

Induktionsschritt $n \to n+1$. Es sei $n \geq 0$ und bereits bewiesen, daß $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen zeigen, daß dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 \overset{!}{=} \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1)$$

gilt. Aber es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right) + (2(n+1)-1)^2 \quad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{3}n(4n^2-1) + (2n+1)^2\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n) + (4n^2+4n+1)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n+12n^2+12n+3)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3+12n^2+11n+3)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wirklich schön ist diese Art der Beweisführung nicht, weil die Faktorisierung des Ausdrucks $4n^3+12n^2+11n+3$ alles andere als offensichtlich ist. Helfen würde hier der Trick, den Induktionsschritt nicht für den Schritt $n \to n+1$ für $n \geq 0$, sondern für den Schritt $n-1 \to n$ für $n \geq 1$ durchzuführen. Das sieht dann so aus:

Der **Induktionsanfang** ändert sich nicht.

Für den **Induktionsschritt** $n-1 \to n$ sei $n \geq 1$ und bereits bewiesen, daß

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n-1)(4(n-1)^2-1)$$

ist (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen zeigen, daß dann auch

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \overset{!}{=} \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

gilt. Aber es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^2\right) + (2n-1)^2 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{3}(n-1)(4(n-1)^2-1) + (4n^2-4n+1)\\
&= \frac{1}{3}(n-1)(4n^2-8n+3) + 4n^2-4n+1\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-12n^2+11n-3) + \frac{1}{3}(12n^2-12n+3)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n)\\
&= \frac{1}{3}n(4n^2-1).
\end{aligned}$$

Man beachte, daß in dieser Rechnung kein „magisches Faktorisieren von Ausdrücken“ stattgefunden hat. Der Grund ist der, daß Ausklammern von n viel einfacher ist als Ausklammern von $n+1$; daß das passieren würde, war aber abzusehen, weil in der zu beweisenden Formel der Faktor n enthalten ist!

b) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{0} k^3 = 0$ (leere Summe) und $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = 0$, die Behauptung stimmt also.

Für den **Induktionsschritt** benutze ich diesmal gleich die Variante, die am Ende der Lösung von Aufgabe a) vorgestellt wurde; ich zeige also nicht den Schritt $n \to n+1$ für $n \geq 0$, sondern den Schritt $n-1 \to n$ für $n \geq 1$.

Mathematisch ist das stets äquivalent; wie in Aufgabe a) angedeutet, ist die Existenz des Faktors n^2 in der zu beweisenden Formel ein starkes Indiz dafür, daß dieses Beweisverfahren leichter zum Ziel führt. (Ich persönlich formuliere Induktionsbeweise *fast immer* auf diese Art, weil ich eine zu beweisende Aussage der Form $A(n)$ leichter als Ziel vor Augen behalten kann als ihre Form $A(n+1)$.)

Sei also $n \geq 1$ und die Behauptung für $n-1$ bewiesen, also bereits gezeigt, daß

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2$$

gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Es ist zu zeigen, daß dann auch $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ist. Aber es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right) + n^3 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 + n^3\\
&= \frac{1}{4}(n^4-2n^3+n^2) + n^3\\
&= \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)\\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 2. Die Eigenschaft i) einer Peanostruktur (Definition 5.1 der Vorlesung) ist erfüllt, denn die Funktion $\nu : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\nu(n) = n+1$, ist injektiv.
Eigenschaft ii) ist ebenfalls erfüllt, denn es gibt kein $n \in N = \mathbb{R}_0^+$ mit $\nu(n) = 0$, d.h. $n+1 = 0$.

Jedoch ist Eigenschaft iii) *nicht* erfüllt: Denn für die Teilmenge $M := \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}_0^+ = N$ gilt $0 = n_0 \in M$, und für jedes $m \in M = \mathbb{N}_0$ gilt auch $m + 1 = \nu(m) \in \mathbb{N}_0 = M$. Es ist jedoch $\mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{R}_0^+$, während Eigenschaft iii) erzwingen würde, daß $\mathbb{N}_0 = \mathbb{R}_0^+$ gilt.
Damit ist (N, n_0, ν) ***keine*** Peanostruktur. (Grob gesagt: Die Menge hat „zu viele" Elemente, als daß man sie durch stetiges Nachfolgerbilden ausschöpfen könnte.)

Aufgabe 3. **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ und $3 - \frac{2}{\sqrt{n}} = 1$, so daß die behauptete Ungleichung stimmt.
Induktionsschritt $n-1 \to n$. Es sei $n \geq 2$ und bekannt, daß $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n-1}}$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Wir wollen zeigen, daß dann auch $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ gilt; aber es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{n\sqrt{n}} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\ &\leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \\ &\overset{!}{\leq} 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Die mit einem Ausrufezeichen versehene Ungleichung beweisen wir mit der folgenden Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 3 - \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \iff\quad & \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}} \\ \iff\quad & \frac{2n+1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}} && (*) \\ \iff\quad & \frac{(2n+1)^2}{n^3} \leq \frac{4}{n-1} \\ \iff\quad & (n-1) \cdot (2n+1)^2 \leq 4n^3 \\ \iff\quad & 4n^3 - 3n - 1 \leq 4n^3 \\ \iff\quad & 0 \leq 3n + 1 && \text{(wahre Aussage)}. \end{aligned}$$

An der mit $(*)$ markierten Stelle haben wir beide Seiten quadriert; dies ist in diesem Fall tatsächlich eine Äquivalenzumformung, da wir es auf beiden Seiten der Ungleichung mit *nichtnegativen* Zahlen zu tun haben.

Es sei noch bemerkt, daß prinzipiell ausgeschlossen ist, die behauptete Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ *direkt* mittels vollständiger Induktion zu beweisen: Denn dazu müßte man aus einer Ungleichung der Form $A < 3$ eine Ungleichung $A + B < 3$ mit $B > 0$ folgern, und das ist nicht möglich, weil man nicht weiß, „wie nah" A bereits an der Grenze 3 liegt. Genau diese Quantifizierung des Abstands ist aber gegeben, wenn man sogar $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ weiß, wie in der Induktionsvoraussetzung unseres Beweises.

Aufgabe 4.

a) • **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist $2n^3 + 3n^2 + n = 0$ sicher durch 6 teilbar.
Induktionsschritt $n \to n+1$. Es sei $n \geq 0$ und bereits bekannt, daß $2n^3 + 3n^2 + n$ durch 6 teilbar ist (**Induktionsvoraussetzung**), also $2n^3 + 3n^2 + n = 6k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Dann

ist aber

$$\begin{aligned}
2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1) &= 2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+n+1\\
&= \underbrace{2n^3+3n^2+n}_{=6k}+6n^2+6n+2+6n+3+n+1\\
&= 6k+12n+6
\end{aligned}$$

als Summe von durch 6 teilbaren Zahlen wieder durch 6 teilbar, was zu beweisen war.

- **Induktionsanfang.** Für $n=0$ ist $3^{2n}+7=3^0+7=8$ sicher durch 8 teilbar.

  Induktionsschritt $n \to n+1$. Es sei $n \geq 0$ und bereits bekannt, daß $3^{2n}+7$ durch 8 teilbar ist (**Induktionsvoraussetzung**), also $3^{2n}+7=8k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, oder äquivalent $3^{2n}=8k-7$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)}+7 &= 3^{2n+2}+7\\
&= 3^{2n}\cdot 3^2+7\\
&= (8k-7)\cdot 9+7\\
&= 8\cdot 9k-63+7\\
&= 8\cdot 9k-56\\
&= 8\cdot(9k-7)
\end{aligned}$$

  wieder eine durch 8 teilbare Zahl, was zu beweisen war.

b) **Induktionsanfang.** Für $n=1$ ist $a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}=a^2+a+1$ trivialerweise ein Vielfaches von a^2+a+1.

Induktionsschritt $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$ und bereits bekannt, daß $a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}$ ein Vielfaches von a^2+a+1 ist, also $a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}=k\cdot(a^2+a+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, oder äquivalent $a^{n+1}=k\cdot(a^2+a+1)-(a+1)^{2n-1}$ (**Induktionsvoraussetzung**). Dann ist aber auch

$$\begin{aligned}
a^{n+2}+(a+1)^{2(n+1)-1} &= a\cdot a^{n+1}+(a+1)^{2n+1} \quad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= a\cdot\big(k\cdot\big(a^2+a+1\big)-(a+1)^{2n-1}\big)+(a+1)^{2n+1}\\
&= ak\cdot\big(a^2+a+1\big)+(a+1)^{2n-1}\cdot\big((a+1)^2-a\big)\\
&= ak\cdot\big(a^2+a+1\big)+(a+1)^{2n-1}\cdot\big(a^2+a+1\big)\\
&= \big(ak+(a+1)^{2n-1}\big)\cdot\big(a^2+a+1\big)
\end{aligned}$$

ein Vielfaches von a^2+a+1, was zu beweisen war.