Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Für die Summen:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = \frac{(-2)^2}{1^2} = 4,$$
$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = 4 + \frac{(-2)^3}{2^2} = 4 + \frac{-8}{4} = 2,$$
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = 2 + \frac{(-2)^4}{3^2} = 2 + \frac{16}{9} = \frac{34}{9},$$
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = \frac{34}{9} + \frac{(-2)^5}{4^2} = \frac{34}{9} + \frac{-32}{16} = \frac{16}{9}.$$

Für die Produkte:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7},$$
$$\prod_{k=1}^{2} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2 + 2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{12} = \frac{2}{21},$$
$$\prod_{k=1}^{3} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3 + 2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{6}{17} = \frac{4}{119},$$
$$\prod_{k=1}^{4} \frac{2k}{5k+2} = \frac{4}{119} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4 + 2} = \frac{4}{119} \cdot \frac{8}{22} = \frac{16}{1309}.$$

b) Um die wechselnden („alternierenden“) Vorzeichen bei der Summe in den Griff zu bekommen, schreiben wir sie um als

$$\frac{1}{1^3} + \frac{(-1)}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{(-1)}{10^3}.$$

Im k-ten Summanden hat der **Nenner** die Form k^3. Für die Behandlung der **Zähler** brauchen wir eine Möglichkeit, die Folge von Zahlen

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$$

formelmäßig auszudrücken. Dafür gibt es einen Standardtrick, der sich folgendermaßen herleiten läßt: Jede dieser Zahlen ist das (-1)-Fache der vorangehenden, also gilt

$$a_1 = 1,\ a_2 = (-1) \cdot a_1 = -1,\ a_3 = (-1) \cdot a_2 = (-1)^2,\ a_4 = (-1) \cdot a_3 = (-1)^3,\ \ldots$$

und allgemein $a_k = (-1)^{k-1}$. Damit läßt sich der k-te Summand schreiben als $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, und die gesamte Summe ist damit

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}.$$

Beim Produkt durchlaufen die Zähler genau die geraden Zahlen zwischen 2 und 60, also die Zahlen $2k$ für $k = 1, \dots, 30$. Der Nenner wächst in jedem Glied um 3 an, wird also den Ausdruck $3k$ beinhalten; genauer ist er immer um 2 größer als $3k$, hat also die Form $3k+2$ (man kann darauf asuch kommen, indem man sich fragt, wie wohl ein – hier nicht auftauchender – „nullter" Bruch aussähe: Er hätte sicher den Nenner 2). Die Faktoren haben demnach die Form $2k3k+2$ für $k = 1, \dots, 30$, und das Produkt ist

$$\prod_{k=1}^{30} \frac{2k}{3k+2}.$$

c) Wir schreiben Variablen für die beiden Fragezeichen und also Zahlen A und B derart, daß

$$\frac{1}{k^2+k} \stackrel{!}{=} \frac{A}{k} - \frac{B}{k+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Vielleicht findet man schon durch Probieren eine Lösung; systematisch geht es so: Durch Bringen auf den Hauptnenner erhalten wir

$$\frac{A}{k} - \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) - Bk}{k \cdot (k+1)} = \frac{(A-B)k + A}{k^2+k},$$

so daß wir sicher dann fertig sind, wenn wir A und B so wählen können, daß $(A-B)k + A = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn $B = A$ ist (dann verschwindet der erste Summand) und außerdem $A = 1$, also insgesamt für $A = B = 1$. Halten wir also fest: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Damit entpuppt sich die angegebene große Summe als Teleskopsumme ähnlich dem Teleskopprodukt aus Aufgabe 1 c) vom Tutoriumsblatt: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{999} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) \\
&= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{999}} - \frac{1}{1000} \\
&= 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Wir formen den Term $x^2 + 2px + q$ mittels Quadratischer Ergänzung um:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2px + q &= x^2 + 2px + p^2 + q - p^2 \\
&= (x+p)^2 - (p^2 - q) \\
&= (x+p)^2 - w^2 \qquad \text{(3. Binomische Formel)} \\
&= (x+p+w) \cdot (x+p-w).
\end{aligned}$$

Es ist also genau dann $x^2 + 2px + q = 0$, wenn $(x + p + w) \cdot (x + p - w) = 0$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet: Also im Fall $x + p + w = 0$, d.h. $x = -p - w$, und im Fall $x + p - w = 0$, d.h. $x = -p + w$.

b) Die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ hat die Form $x^2 + 2px + q = 0$ mit $p = 5$ und $q = 21$. Tatsächlich ist $p^2 - q = 25 - 21 = 4 = 2^2$, wir können also in Teilaufgabe a) $w = 2$ setzen und erhalten dann, daß genau dann $x^2 + 10x + 21 = 0$ ist, wenn $x = -p + w = -5 + 2 = -3$ oder $x = -p - w = -5 - 2 = -7$ ist. Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $L = \{-3, -7\}$.

Aufgabe 3.

a) Es ist
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} = a \cdot c = d^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$
denn es ist $(b \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot b^{-1}$ (vgl. Lösungsvorschlag zum 4. Tutoriumsblatt, Aufgabe 3 a)).

b) Es ist
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \overset{\text{a)}}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$
denn es ist $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$ wegen
$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} \overset{\text{a)}}{=} \frac{c \cdot d}{c \cdot d} = 1$$
und der Eindeutigkeit von Inversen. (Natürlich ist auch ein direkter Beweis von b) ohne Rückgriff auf a) möglich.)

Aufgabe 4. Um beide Seiten der Gleichung sinnvoll miteinander vergleichen zu können, bringen wir sie auf einen gemeinsamen Nenner. Damit die Terme nicht zu groß werden, sollte man beachten, daß $9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 - x) \cdot (3 + x)$ ist, daß also als gemeinsamer Nenner bereits $9 - x^2$ ausreicht (und nicht etwa $(9 - x^2) \cdot (3 - x) \cdot (3 + x)$ benötigt wird).
Wegen
$$\frac{x}{3 - x} - \frac{x^2 + 9}{9 - x^2} = \frac{x \cdot (3 + x)}{(3 - x) \cdot (3 + x)} - \frac{x^2 + 9}{9 - x^2} = \frac{3x + x^2 - x^2 - 9}{9 - x^2} = \frac{3x - 9}{9 - x^2}$$
und
$$1 - \frac{x}{3 + x} = \frac{9 - x^2}{9 - x^2} - \frac{x \cdot (3 - x)}{(3 + x) \cdot (3 - x)} = \frac{9 - x^2 - 3x + x^2}{9 - x^2} = \frac{9 - 3x}{9 - x^2}$$
gilt also für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$:
$$\begin{aligned} & \frac{x}{3 - x} - \frac{x^2 + 9}{9 - x^2} = 1 - \frac{x}{3 + x} \\ \iff \quad & \frac{3x - 9}{9 - x^2} = \frac{9 - 3x}{9 - x^2} \\ \iff \quad & 3x - 9 = 9 - 3x \\ \iff \quad & 6x = 18 \\ \iff \quad & x = 3. \end{aligned}$$

Da $x = 3$ aber nicht in $\mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$ liegt, ist damit $L = \emptyset$.