Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Summen- und Produktzeichen).

a) Für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ bestimme man

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{5k+2}.$$

b) Man schreibe

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - + \ldots - \frac{1}{10^3} \quad \text{und} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{60}{92}$$

mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens.

c) Man vervollständige die Aussage

$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{?}{k} - \frac{?}{k+1}$$

so, daß sie für alle $k \in \mathbb{N}$ gültig wird, und bestimme dann den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k^2 + k}.$$

Aufgabe 2 (Quadratische Gleichungen in Körpern). Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

a) Es seien $p, q \in K$ gegeben, und es sei bekannt, daß es ein $w \in K$ gibt mit $p^2 - q = w^2$. Zeige, daß dann für alle $x \in K$ gilt:

$$x^2 + 2px + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -p + w \text{ oder } x = -p - w.$$

(Bemerkung: Dies ist im Wesentlichen eine Version der aus der Schule bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen, die über jedem Körper funktioniert. Zum Beweis soll die Lösungsformel aber nicht verwendet werden!)

b) Man löse für $K = \mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ mittels a).

Aufgabe 3 (Rechenregeln für Brüche). Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Man zeige für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$:

a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$

b) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ falls $c \neq 0$.

Aufgabe 4 (Lösen von Gleichungen). Man bestimme die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\} \;\middle|\; \frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \frac{x}{3+x} \right\}.$$

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 22. November 2013, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibiothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!
Achtung: Keine Punktehürde zur Klausurzulassung mehr für Student(inn)en, die bereits in einem vergangenen Semester die Zulassung zur Klausur Grundlagen I bei Prof. Rost oder Dr. Schörner erreicht haben!