Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es lohnt sich, im ausgeschriebenen Ausdruck für $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ die Faktoren zu isolieren, die nicht von n, sondern nur von k abhängen (das erleichtert den Vergleich, wenn wir später n durch m ersetzen): Das ergibt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

und entsprechend für $\binom{m}{k}\frac{1}{n^k}$

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \ldots = \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right).$$

Wegen $n < m$ ist aber $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, also $\frac{\ell}{m} < \frac{\ell}{n}$ für alle $\ell \geq 1$; daraus folgt $1-\frac{\ell}{m} > 1-\frac{\ell}{n}$, und Multiplikation all dieser Ausdrücke liefert

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ \leq\ &\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right),\end{aligned}$$

und das war die Behauptung. (Hier steht nur $\leq$ statt $<$; um den Grund zu verstehen, untersuche man, was in Fällen $k = 0$ und $k = 1$ passiert!)

b) Wegen $n < m$ ist

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \overset{\text{a)}}{\leq} \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = a_m,$$

was zu beweisen war.

c) Es ergeben sich beispielsweise die folgenden Werte (je nachdem, wie weit der Taschenrechner mitkommt):

n	a_n
10	$2,59374246010000$
100	$2,70481382942153$
500	$2,71556852065173$
1.000	$2,71692393223589$
5.000	$2,71801005010185$
10.000	$2,71814592682522$
50.000	$2,71825464613910$
100.000	$2,71826823717449$
500.000	$2,71827911018220$
1.000.000	$2,71828046931938$
5.000.000	$2,71828155663091$

Es scheint also, daß die Werte zwar relativ immer größer werden (das haben wir in b) bewiesen), sie jedoch nicht im Wortsinne „groß" werden, sondern sich einem „Ziel" von unten „anzunähern" scheinen; diese Zielzahl würde vermutlich $2.71828\ldots$ lauten – und das ist eine aus dem Schulunterricht bestens bekannte Zahl, nämlich e.

Die Untersuchung dieser Phänomene – „konvergente" Folgen, die sich „Grenzwerten" annähern – und die Erklärung dafür, warum hier die Zahl e auftaucht, gehört zum Stoff der Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung im 3. Studienjahr.

Aufgabe 2.

a) Wir erfassen Paßworter verschiedener Länge gesondert; um möglichst effizient zu rechnen, ermitteln wie die Anzahl von Paßwörtern der Länge ℓ für beliebiges $\ell \geq 2$:

Es gibt $\binom{\ell}{2}$ Möglichkeiten für die Wahl der Plätze für die beiden Buchstaben; für ihre Belegung gibt es dann jeweils $26 \cdot 25$ Möglichkeiten (für die weiter links stehende Stelle einen der 26 Buchstaben des Alphabets, für die weiter rechts stehende einen der verbleibenden 25 Buchstaben). Für die übrigen $\ell - 2$ Stellen gibt es dann jeweils $10^{\ell-2}$ Möglichkeiten (für jede der Stellen eine der zehn Ziffern $0, 1, \ldots, 9$). Insgesamt gibt es also

$$\binom{\ell}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^{\ell-2} = \binom{\ell}{2} \cdot 65 \cdot 10^{\ell-1}$$

Paßworter der Länge ℓ.

Wenn nun die erlaubten Längen $\ell = 4, 5, 6$ sind, gibt es also insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=4}^{6} \binom{\ell}{2} \cdot 65 \cdot 10^{\ell-1} &= 65 \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot 10^3 + \binom{5}{2} \cdot 10^4 + \binom{6}{2} \cdot 10^5 \right) \\ &= 65 \cdot (6 \cdot 1.000 + 10 \cdot 10.000 + 15 \cdot 100.000) \\ &= 104.390.000\end{aligned}$$

verschiedene Paßwörter.

b) (i) Es gibt $10^5 = 100.000$ verschiedene fünfstellige PIN-Nummern (nämlich diejenigen zwischen 00000 und 99999) – im Urnenmodell wird eine PIN-Nummer bestimmt, indem man aus einer Urne mit zehn Kugeln (Ziffern) fünfmal mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge zieht.

(ii) Im Urnenmodell wird nun ohne Zurücklegen gezogen; nun gibt es $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240$ verschiedene Möglichkeiten.

(iii) Hier muß man unterscheiden, ob die mehrfach auftretende Ziffer zwei-, drei-, vier- oder fünfmal auftritt:

- Tritt die mehrfach auftretende Ziffer genau *zweimal* auf, so gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten für die Auswahl ihrer Positionen; für die Wahl, *welche* Ziffer doppelt auftritt, gibt es 10 Möglichkeiten, und die übrigen drei Stellen werden auf eine von $9 \cdot 8 \cdot 7$ möglichen Weisen aufgefüllt. Damit gibt es $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 50.400$ PIN-Nummern mit genau einer doppelt und drei einfach auftretenden Ziffern.
- Tritt die mehrfach auftretende Ziffer genau *dreimal* auf, so gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten für die Auswahl ihrer Positionen; für die Wahl, *welche* Ziffer doppelt auftritt, gibt es wieder 10 Möglichkeiten, und die übrigen drei Stellen werden auf eine von $9 \cdot 8$ möglichen Weisen aufgefüllt. Damit gibt es $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7.200$ PIN-Nummern mit genau einer dreifach und zwei einfach auftretenden Ziffern.
- Tritt die mehrfach auftretende Ziffer genau *viermal* auf, so gibt es $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten für die Auswahl ihrer Positionen; für die Wahl, *welche* Ziffer doppelt auftritt, gibt es wieder 10 Möglichkeiten, und die verbliebene Stellen wird auf eine von 9 möglichen Weisen aufgefüllt. Damit gibt es $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$ PIN-Nummern mit genau einer vierfach auftretenden Ziffer.
- Tritt die mehrfach auftretende Ziffer genau *fünfmal* auf, so ist die PIN-Nummer eine der 10 Möglichkeiten 00000, 11111, ..., 99999.

Insgesamt gibt es also $50.400 + 7.200 + 450 + 10 = 58.060$ PIN-Nummern mit genau einer mehrfach auftretenden Ziffer. – Eine einfachere Zählweise wird unten vorgeschlagen, dazu müssen wir aber erst Aufgabe (iv) lösen.

(iv) Treten zwei Ziffern mehrfach auf, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Beide mehrfach auftretenden Ziffern treten genau zweimal auf: Dann gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ Möglichkeiten für die Auswahl ihrer Positionen; für die Wahl der ersten dieser beiden Ziffern gibt es 10, für die der zweiten 9 Möglichkeiten. Für die letzte verbliebene Ziffer bleiben 8 Möglichkeiten übrig. Nun haben wir aber jede PIN-Nummer zweimal gezählt (da wir jede Möglichkeit, zwei Zweierpäckchen aus fünf Ziffern auszuwählen, doppelt gerechnet haben); also gibt es insgesamt

$$30 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 10.800$$

PIN-Nummern dieses Typs.
- Eine Ziffer tritt zweimal, die andere dreimal auf. Dann gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten für die Positionen der zweimal auftretenden Ziffer; für ihren Wert gibt es 10 Möglichkeiten, für den der anderen noch 9. Insgesamt gibt es also $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ PIN-Nummern dieses Typs.

Zusammen gibt es also $10.800 + 900 = 11.700$ PIN-Nummern mit zwei mehrfach auftretenden Ziffern.

Nun ergibt sich noch eine etwas einfachere Zählweise für die Anzahl der PIN-Nummern mit genau einer doppelten Ziffer: Jede PIN-Nummer hat entweder keine, eine oder zwei mehrfach auftretende Ziffern (denn 3 mehrfach auftretende Ziffern würden 6 Stellen belegen, und so viel Platz haben wir nicht). An Nummern ohne mehrfach auftretende Ziffern gibt es 30.240 Stück (siehe (ii)); an Nummern mit zwei mehrfach auftretenden Ziffern gibt es 11.700 Stück (das ist (iv)). Da es insgesamt 100.000 verschiedene PIN-Nummern gibt (vgl. (i)), ist die Anzahl der verbleibenden PIN-Nummern mit genau einer mehrfach auftretenden Ziffer

$$100.000 - 30.240 - 11.700 = 58.060,$$

wie wir sie auch in (iii) erhalten haben.

Aufgabe 3.

a) Frank muß insgesamt zwei Blocks ostwärts (ich schreibe in Zukunft „rechts") und drei Blocks nordwärts, also nach „oben" laufen. An den Kreuzungen hat er die Möglichkeit, die Richtung zu ändern; jeder Schritt nach links oder unten führt zwangsläufig zu einem Umweg, ist also ausgeschlossen.

   Die kürzesten Wege sind also diejenigen, bei denen er in irgendeiner Reihenfolge insgesamt drei „Schritte" (von der Größe eines Blocks) nach oben und zwei nach rechts vornimmt; diese Wege sind auch alle gleich lang. Ein möglicher Weg wäre also RROOO (zuerst zweimal nach rechts, dann die drei Schritte nach oben), ein anderer ORORO (also oben, rechts, oben, rechts, oben), und so weiter.

   Insgesamt gibt es so viele Wege, wie es Möglichkeiten gibt, die beiden Rs in einem aus fünf Zeichen bestehenden Code für den gewählten Weg unterzubringen (die anderen Plätze werden dann mit Os aufgefüllt). Das sind also $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, und man kann sie sogar alle auflisten: RROOO, ROROO, ROORO, ROOOR, ORROO, ORORO, OROOR, OORRO, OOROR, OOORR.

b) Die Überlegung ist identisch zu derjenigen in Aufgabe a): Insgesamt muß Frank m Schritte nach rechts und n Schritte nach oben gehen, insgesamt also $m + n$ Schritte. Die Anzahl der möglichen kürzesten Wege ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, unter den insgesamt $m + n$ zu gehenden Schritten diejenigen m auszuwählen, die nach rechts führen sollen (oder diejenigen n, die nach oben führen); dafür gibt es

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \binom{n+m}{n}$$

   Möglichkeiten.

Aufgabe 4.

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\rho\circ\rho &= (1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7)\circ(1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&5&7&3&4&6\end{pmatrix},\\
\rho\circ\sigma &= (1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7)\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&7&1&4&5&6\end{pmatrix},\\
\rho\circ\tau &= (1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7)\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&4&2&1&5&3&1\end{pmatrix},\\
\sigma\circ\rho &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix}\circ(1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&1&2&3&4&5\end{pmatrix},\\
\sigma\circ\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&3&2&7&4&1&5\end{pmatrix},\\
\sigma\circ\tau &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&6&2&1&3&7\end{pmatrix},\\
\tau\circ\rho &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix}\circ(1\ 3\ 2\ 5)\circ(4\ 6\ 7) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&7&1&4&5&6\end{pmatrix},\\
\tau\circ\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&1&2&5&7&6\end{pmatrix},\\
\tau\circ\tau &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&3&1&7&4&2\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned}
\rho^{-1} &= ((1\ \ 3\ \ 2\ \ 5)\circ(4\ \ 6\ \ 7))^{-1} = (1\ \ 3\ \ 2\ \ 5)^{-1}\circ(4\ \ 6\ \ 7)^{-1} = (5\ \ 2\ \ 3\ \ 1)\circ(7\ \ 6\ \ 4),\\
\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&5&7&2&4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&6&1&7&4&3&5\end{pmatrix},\\
\tau^{-1} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&3&1&7&4&2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Es muß

$$\begin{aligned}
\pi = \sigma^{-1}\circ\tau &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&6&1&7&4&3&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&5&1&3&6&2&4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi = \tau\circ\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&1&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&6&1&7&4&3&5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&4&5&6&3&2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sein, vgl. den Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 b) vom 13. Tutoriumsblatt.

c) Das Rechenverfahren wurde im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 c) vom 13. Tutoriumsblatt beschrieben; ich gebe nur noch die Ergebnisse an: Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1\ \ 3\ \ 6\ \ 2)(4\ \ 5\ \ 7) = (1\ \ 3)(3\ \ 6)(6\ \ 2)(4\ \ 5)(5\ \ 7),\\
\tau &= (1\ \ 4\ \ 6)(2\ \ 7\ \ 5) = (1\ \ 4)(4\ \ 6)(2\ \ 7)(7\ \ 5),
\end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, daß die Darstellung als Produkt von Zyklen (wenn sie disjunkt sind!) eindeutig ist, sich also andere Lösungen höchstens in der Reihenfolge der Zyklen bzw. durch Rotation der Zahlen innerhalb eines Zyklus unterscheiden können, während es für die Darstellung als Produkt von Transpositionen (unendlich) viele weitere Möglichkeiten gibt.