Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Eine Überlegung vorab, die zu einer leicht vom Standardmuster abweichenden Form des Induktionsbeweises führt: Der Induktionsschritt, den wir verwenden möchten, wird so aussehen, daß wir für ein gegebenes n im Wesentlichen die folgende Rechnung durchführen werden:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)\right] \\
&= (\ldots \text{Rechnung} \ldots) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+2}\frac{1}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Rekursionsformel $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n)$ verwendet, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; außerdem die zu beweisende Aussage in den Fällen $n-1$ und n (denn wir haben die Formel für a_{n-1} und für a_n verwendet).

Das bedeutet, daß wir einen Induktionsschritt nicht der Form $n \to n+1$, sondern der Form $(n-1, n) \to n+1$ führen müssen, der für $n \geq 1$ funktioniert. Insbesondere muß für den Induktionsanfang die Gültigkeit der Aussage für die ersten *zwei* Fälle $n = 0$ und $n = 1$ nachgewiesen werden, damit die erste Anwendung des Induktionsschrittes dann die Form $0, 1 \to 2$ haben kann.

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $a_0 = 0$ sowie

$$\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{0+1}\frac{1}{2^0}\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0,$$

die Aussage stimmt also.
Für $n = 1$ ist $a_1 = 1$ sowie

$$\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{1+1}\frac{1}{2^1}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1,$$

auch hier ist die Formel also korrekt.
Induktionsschritt $(n-1, n) \to n+1$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Formel für a_{n-1} und a_n bereits bewiesen, also

$$a_{n-1} = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{und} \quad a_n = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right).$$

Dann gilt nach der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} + 1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung, da $(-1)^n = (-1)^{(n+1)+1}$ gilt wegen $(-1)^2 = 1$.

Aufgabe 2.

a) Für $n = 0$ liefert die linke Seite den Wert 0 (leere Summe), die rechte den Wert $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$, die Behauptung stimmt also in diesem Fall.

   Den Induktionsschritt führen wir diesmal in der Form $n-1 \to n$: Sei also $n \geq 1$ und bereits bekannt, daß $\sum_{k=1}^{n-1}(k! \cdot k) = n! - 1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k! \cdot k) &= n! \cdot n + \sum_{k=1}^{n-1}(k! \cdot k) \\
&= n! \cdot n + n! - 1 \\
&= n! \cdot (n+1) - 1 \\
&= (n+1)! - 1,
\end{aligned}$$

   was zu beweisen war.

b) Diese Aussage hängt von zwei Variablen k, n ab, wobei immer $0 \leq k \leq n$ verlangt wird. „Induktion nach n“ bedeutet hier also: Wir führen für jedes (als festgehalten zu denkende) $k \geq 0$ einen Induktionsbeweis für alle $n \geq k$.

   Der Induktionsanfang ist dann der Fall $n = k$: die linke Seite liefert hier $\binom{k}{k} = 1$, die rechte $\binom{k+1}{k+1} = 1$, so daß die Aussage in diesem Fall stimmt.

   Sei nun $n \geq k$ und bereits bekannt, daß $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ gilt. Für den Fall $n+1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n+1}\binom{j}{k} &= \binom{n+1}{k} + \sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \\
&\overset{(*)}{=} \binom{n+2}{k+1} = \binom{(n+1)+1}{k+1},
\end{aligned}$$

   wobei im Schritt $(*)$ die Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten aus der Vorlesung verwendet wurde.

Aufgabe 3.

a) Wir beweisen die Formel durch Induktion nach n: Für $n = 2$ liefert die linke Seite den Wert $x_2^2 = 1^2 = 1$, die rechte den Wert $x_1 \cdot x_3 - (-1)^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$. In diesem Fall stimmt die Formel also.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ sei $n \geq 2$ und bereits bewiesen, daß $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1} - (-1)^n$ gilt. Um nun zu beweisen, daß dann auch $x_{n+1}^2 = x_n \cdot x_{n+2} - (-1)^{n+1}$ gilt, sollten wir versuchen, den Term x_{n-1} aus der Induktionsvoraussetzung loszuwerden. Wir schreiben ihn also (unter Verwendung der Definition der Fibonaccifolge) um zu $x_{n+1} - x_n$ (anstatt beispielsweise x_{n+1} durch $x_n + x_{n-1}$ zu ersetzen): Das liefert

$$\begin{aligned} x_n^2 &= (x_{n+1} - x_n) \cdot x_{n+1} - (-1)^n \\ &= x_{n+1}^2 - x_n \cdot x_{n+1} - (-1)^n, \end{aligned}$$

also durch Auflösen nach x_{n+1}^2:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= x_n^2 + x_n \cdot x_{n+1} + (-1)^n \\ &= x_n \cdot (x_n + x_{n+1}) + (-1)^n \\ &= x_n \cdot x_{n+2} - (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

b) Die explizite Formel für die Glieder der Fibonaccifolge lautet

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

wobei wir zur Abkürzung a und b definiert haben durch

$$a := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Für unsere Rechnungen wird es nützlich sein, sich zu merken, daß

$$a \cdot b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

ist. Damit ergibt sich einerseits

$$\begin{aligned} x_n^2 &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - 2 \cdot (-1)^n \right) \end{aligned}$$

und andererseits für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} x_{n-1}\, x_{n+1} &= \frac{1}{5} \left(a^{n-1} - b^{n-1} \right) \left(a^{n+1} - b^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - a^{n-1} b^{n+1} - b^{n-1} a^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - a^{n-1} b^{n-1} \cdot \left(b^2 + a^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - (-1)^{n-1} \left(b^2 + a^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Da aber

$$b^2 + a^2 = \frac{(1-\sqrt{5})^2 + (1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{4} = 3$$

ist, ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x_{n-1}\, x_{n+1} - (-1)^n &= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} - 3 \cdot (-1)^{n-1}\right) - (-1)^n \\ &= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} + 3 \cdot (-1)^n - 5 \cdot (-1)^n\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} - 2 \cdot (-1)^n\right) \\ &= x_n^2, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Aufgabe 4.

a) Es ist $w_1 = \alpha y_1 + \beta z_1 = \alpha a + \beta b$ und $w_2 = \alpha y_2 + \beta z_2 = \alpha a^2 + \beta b^2$, so daß wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= 1 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 &= 1 \end{aligned}$$

lösen müssen. Multiplikation der ersten Gleichung mit a liefert $\alpha a^2 + \beta ab = a$, und Abziehen dieser Gleichung von der zweiten Gleichung liefert $\beta(b^2 - ab) = 1 - a$, also

$$\beta = \frac{1-a}{b^2 - ab} = \frac{1-a}{b(b-a)}$$

und damit

$$\alpha = \frac{1 - \beta b}{a} = \frac{1 - \frac{1-a}{b-a}}{a} = \frac{b - a - (1-a)}{a(b-a)} = \frac{b-1}{a(b-a)} = \frac{1-b}{a(a-b)}.$$

b) Um die Formel $w_n = \alpha y_n + \beta z_n = \alpha a^n + \beta b^n$ explizit zu machen, müssen wir nur noch α und β etwas weniger verklausuliert aufschreiben: Es ist

$$\alpha = \frac{1-b}{a(a-b)} = \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

und

$$\alpha = \frac{1-a}{b(b-a)} = \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot (-\sqrt{5})} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Damit ergibt sich

$$w_n = \alpha a^n + \beta b^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Hier ist also für w_n die aus der Vorlesung bekannte Formel für die Glieder der Fibonaccifolge entstanden – wir wissen nur noch nicht, *daß* (w_n) die Fibonaccifolge ist. Dies wird im nächsten Schritt bewiesen.

c) Ich behaupte, daß $w_n = x_n$ für alle $n \geq 1$ gilt. Dies beweisen wir per Induktion: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt die Aussage, da wir α und β genau so gewählt hatten, daß $w_1 = 1 = x_1$ und $w_2 = 1 = x_2$ gilt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, daß $n \geq 2$ ist und schon bewiesen, daß $w_{n-1} = x_{n-1}$ und $w_n = x_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \alpha y_{n+1} + \beta z_{n+1} && \text{((}y_n\text{) und (}z_n\text{) sind verallg. Fibonaccifolgen...)} \\
&= \alpha(y_n + y_{n-1}) + \beta(z_n + z_{n-1}) \\
&= (\alpha y_n + \beta z_n) + (\alpha y_{n-1} + \beta z_{n-1}) \\
&= w_n + w_{n-1} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden...)} \\
&= x_n + x_{n-1} && \text{(Definition der Fibonaccifolge...)} \\
&= x_{n+1},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.